

УДК 624.046.3

*Е.И. Орешко¹, В.С. Ерасов¹, О.А. Лашов¹, Н.Ю. Подживотов¹, Д.В. Качан²***РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОИСТОМ МАТЕРИАЛЕ**

DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-10-93-106

С помощью конечно-элементного программного комплекса ANSYS показано, что напряжения, которые возникают в слоистых образцах при нагрузке, не зависят от количества слоев, если не изменяется суммарная толщина разномодульных материалов.

Разработана модель для расчета напряжений в каждом слое слоистой пластины. Построен график зависимости расчетного коэффициента для расчета напряжений в слоистом образце от отношения модулей упругости его материалов в случае равной толщины разномодульных слоев. Предложена система уравнений, позволяющая определить напряжения в разномодульных слоях пластины.

Ключевые слова: *расчет устойчивости, слоистый материал, метод конечных элементов, напряжения, критическая сила потери устойчивости.*

*E.I. Oreshko¹, V.S. Erasov¹, O.A. Lashov¹, N.Yu. Podjivotov¹, D.V. Kachan²***CALCULATION OF TENSION IN A LAYERED MATERIAL**

Calculations in the final element program ANSYS complex showed that tension which arise in layered samples at loading do not depend on quantity of layers if the total thickness of materials with different values of the module of elasticity does not change.

The model is developed for calculation of tension in each layer of a layered plate. The schedule of dependence of settlement factor for calculation of tension in a layered sample from the relation of modules of elasticity of its materials in case of equal thickness of layers with different values of the module of elasticity is constructed. The system of the equations, allowing to define tension in plate layers with different values of the module of elasticity is offered.

Keywords: *stability analysis, layered material, finite elements method, tension, critical strength of buckling.*

¹Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal State Unitary Enterprise «All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials» State Research Center of the Russian Federation]; e-mail: admin@viam.ru

²Акционерное общество «Московское машиностроительное предприятие имени В.В. Чернышева» [Joint Stock Company «Chernyshev Moscow Machine-Building Enterprise»]; e-mail: zavod@avia500.ru

Введение

Разработка новых прогрессивных материалов всегда была приоритетным направлением в авиационной отрасли промышленности [1, 2]. Основными критериями, которые стимулировали создание современных авиационных материалов, являлись снижение массы и повышение надежности материалов.

Современные возможности моделирования и производства материалов обуславливают переход к многослойным композиционным материалам с заданными физико-механическими свойствами, обеспечивая требуемую несущую способность и безопасность конструкций при меньшей массе. Композиционные материалы имеют высокие значения удельной прочности и жесткости, усталостной долговечности, могут эксплуатироваться в широком диапазоне температур, имеют малый температурный коэффициент линейного расширения (ТКЛР), что и делает их материалами с широкими технологическими возможностями.

Требования оптимального проектирования, сокращения времени и материальных затрат на эксперимент определили значительный интерес к созданию и совершенствованию методов прогнозирования деформационных и прочностных свойств композиционных материалов и расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из них с использованием современных компьютерных технологий [3].

В связи с этим актуален вопрос развития существующих и разработки новых методик расчета напряжений в слоистых материалах, имеющих в своем составе разномодульные слои. Для решения этой задачи можно использовать численные методы, благодаря которым в механике деформированного твердого тела решен ряд задач для слоистых тонкостенных композиционных материалов [4–24], прогнозирования неупругих свойств изотропных композитов [25–31], пластического деформирования анизотропных материалов [32–48], устойчивости композиционных материалов к механическим нагрузкам [49–69] и др.

Цель данной работы – разработка модели, которая позволит определить напряжения в разномодульных слоях материала. Для этого в работе используется конечно-элементный программный комплекс ANSYS, который позволяет проводить различные виды прочностного анализа моделей различной геометрической формы из изотропных и композиционных материалов [70–78].

Работа выполнена в рамках реализации комплексной научной проблемы 3.3. «Технологии прогнозирования свойств, моделирования и реализации современных процессов конструирования и производства изделий из неметаллических и композиционных материалов с использованием цифровых методов, совместимых с CAD/CAM/CAE и PLM системами» («Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года») [79].

Материалы и методы

При расчете напряжений в слоистом материале применяют метод конечных элементов (МКЭ), который используется при трехмерном моделировании и инженерных расчетах конструкций и их элементов [80–83]. Проведены физико-механические испытания слоистого образца на потерю устойчивости и сравнение полученного при эксперименте напряжения потери устойчивости образца с расчетными данными. Эскиз, фотография и конечно-элементная модель образца для испытаний на потерю устойчивости представлены на рис. 1.

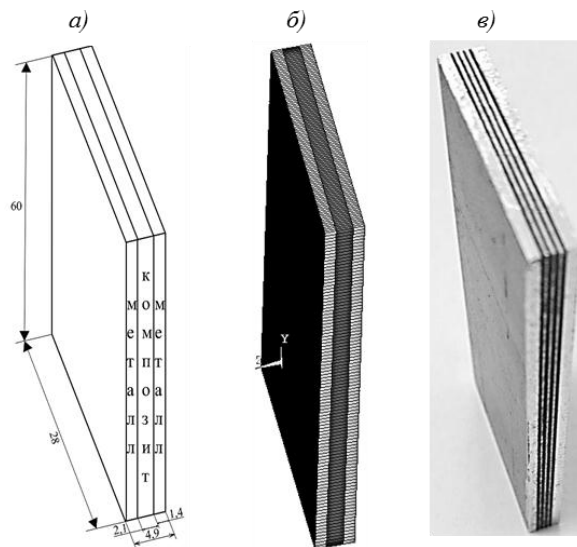


Рис. 1. Слоистый образец размером 60×28×4,9 мм для испытаний на потерю устойчивости: а – эскиз с обозначением материалов образца; б – конечно-элементная модель слоистого образца; в – фотография слоистого образца

Для расчетов критических напряжений потери устойчивости при сжатии слоистого образца применяли метод конечных элементов (МКЭ) и формулу Эйлера [84–87].

Расчет методом конечных элементов выполнен на основе бифуркационной постановки задачи с использованием программного комплекса ANSYS Mechanical APDL. Бифуркационная постановка задачи устойчивости базируется на следующих предположениях: начальное невозмущенное состояние равновесия тела описывается уравнениями линейной теории упругости; зависимости закона Гука справедливы не только для начального состояния, но и при малых отклонениях от него; изменениями размеров и формы тела в начальном состоянии можно пренебречь (тело напряжено, но не деформировано) [80]. Использование этих предположений дает возможность свести задачу устойчивости к задаче на собственные значения для линейных однородных уравнений нейтрального равновесия модели при заданных краевых условиях. Из условия существования нетривиального решения этих уравнений определяются критические параметры нагружения и с точностью до произвольной постоянной – конфигурация модели после потери устойчивости.

При создании модели трехслойного образца для испытаний на потерю устойчивости использовали многослойные оболочечные конечные элементы SHELL181. Данные элементы имеют форму прямоугольника с четырьмя узлами по углам. В образце слой композита и металлического сплава соединены между собой при помощи материала матрицы. В расчетах будем предполагать, что металлические и композитные слои контактируют без отрыва и проскальзывания и имеют по толщине однородную структуру. Точность моделирования композитных оболочек в ANSYS определяется в соответствии с теорией оболочек Миндлина–Рейсснера, которая учитывает влияние поперечных сдвиговых деформаций. Нормальный элемент среднего слоя после деформирования не остается перпендикулярным к поверхности осреднения, а поворачивается на некоторый угол, не искривляясь и не изменяя своей длины.

При разбиении модели трехслойного образца для испытаний на потерю устойчивости на конечные элементы приняты следующие условия: один конечный элемент – на толщину, 30 конечных элементов – на ширину и 60 конечных элементов – на длину модели. Нагружение образца осуществлялось заданием распределенных усилий на его шарнирно закрепленных коротких гранях.

Для сравнения расчетных данных с экспериментальными данными проведено испытание на потерю устойчивости при сжатии слоистого образца. Материалы слоев состояли из изотропного металлического сплава с модулем упругости $E_1=79$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu=0,3$, композиционного квазиизотропного материала (из-за особенностей укладки его монослоев) с модулем упругости $E_2=69$ ГПа и $\mu=0,3$ и склеивающего состава с модулем упругости $E_3=19$ ГПа и $\mu=0,23$. Образец (толщина металлических слоев 2,8 мм, толщина композитного слоя 1,9 мм, толщина склеивающего состава 0,2 мм) устанавливали между нагружающими плитами испытательной машины (шарнирное закрепление коротких кромок) и диаграмму сжатия строили в координатах «напряжение–деформация».

При создании модели слоистых образцов для определения максимальных напряжений в разномодульных слоях использовались объемные конечные элементы SOLID185. Разбиение каждого слоя проводилось со следующими условиями: 10 конечных элементов – по длине и ширине, 2 конечных элемента – по толщине.

Шарнирное условие закрепления модели выполнялось заданием ограничений степеней свободы нижней кромки по трем осям XYZ и верхней кромки – по двум осям XY. Сжимающая нагрузка распределялась по верхней кромке по оси Y.

Слоистый образец состоит из изотропных слоев высокомодульного материала 1 и низко модульного материала 2. Коэффициенты Пуассона слоев равны 0,3. При деформации слоистой пластины предполагается, что слои из разномодульных материалов

укорачиваются на одну и ту же величину, так как верхние и нижние плоскости обеих частей совпадают (условие совместности деформаций).

Результаты

Диаграмма сжатия слоистого образца размером 60×28×4,9 мм до потери устойчивости представлена на рис. 2. За значения критических напряжений потери устойчивости принимались напряжения, соответствующие пределу пропорциональности (на диаграмме это максимальная нагрузка, при ее спаде испытание остановлено).

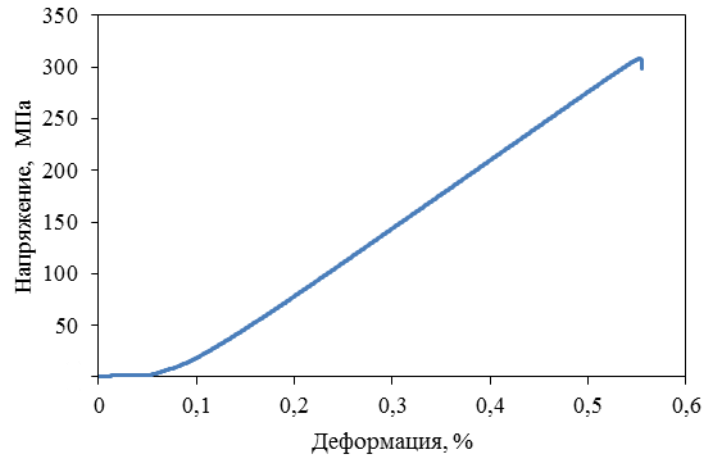


Рис. 2. Диаграмма сжатия слоистого образца размером 60×28×4,9 мм до потери устойчивости в координатах «напряжение–деформация»

При аналитических расчетах устойчивости слоистого образца вычислен усредненный модуль упругости:

$$E_{\text{общ}} = 69 \cdot 0,43 + 79 \cdot 0,57 + 19 \cdot 0,04 = 75,46 \text{ ГПа.}$$

Значения критических напряжений ($\sigma_{\text{кр}}$) потери устойчивости слоистого образца при сжатии, полученные при расчете и эксперименте, представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результат испытаний на потерю устойчивости слоистого образца при сжатии и его сравнение с расчетными данными

Способ определения критических напряжений $\sigma_{\text{кр}}$	$\sigma_{\text{кр}}$, МПа	$\left(\frac{\sigma_{\text{расчет}} - \sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{кр}}} \right) \cdot 100, \%$
С помощью эксперимента	311	–
Расчет по формуле Эйлера	414	33
Расчет с использованием программного комплекса в ANSYS	420	35

При расчете по формуле Эйлера предполагалось, что материал однороден. Более точный расчет проводился МКЭ, при котором учитывались упругие характеристики как металлического сплава, так и композиционного материала. Результаты численных и аналитических расчетов в сравнении с экспериментальными данными показали, что для данной геометрической формы образца более близкий к эксперименту результат показывает формула Эйлера (погрешность 33%). Результаты, полученные МКЭ в ANSYS в

сравнении с экспериментом дают погрешность 35%. Экспериментальный результат интересен тем, что он ближе к менее точному аналитическому расчету, так как на точность испытания по определению критического напряжения потери устойчивости слоистого образца влияет много факторов: геометрические параметры образца, которые всегда имеют некоторую начальную кривизну; технология изготовления композиционного материала; условия проведения эксперимента и т. д.

Оценка адекватности расчетов устойчивости стержней и пластин подробно описана в работах [88, 89].

Для оценки адекватности результатов численных расчетов напряжений, полученных МКЭ, их сравнивали с напряжениями, полученными аналитически по формуле

$$\sigma = F/S, \quad (1)$$

где F – сила, приложенная к образцу; S – площадь поперечного сечения слоистой пластины.

Для этого в разработанных моделях слоистого образца всем слоям присваивали одинаковые свойства материала, что позволяло рассчитывать напряжения, которые возникают в образце по формуле (1). Результаты численных расчетов показали полное совпадение с результатами аналитических расчетов, что свидетельствует об адекватности разработанных конечно-элементных моделей.

Рассмотрим слоистый образец размером $100 \times 100 \times 2$ мм, к которому приложена распределенная по верхней кромке сжимающая нагрузка, равная 1000 Н. Слои из материала 1 – суммарной толщиной $h_1 = 1$ мм с модулем упругости $E_1 = 200$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$. Слои из материала 2 – суммарной толщиной $h_2 = 1$ мм с модулем упругости $E_2 = 100$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$.

Рассматривался образец с тремя, пятью, семью и девятью слоями (рис. 3).

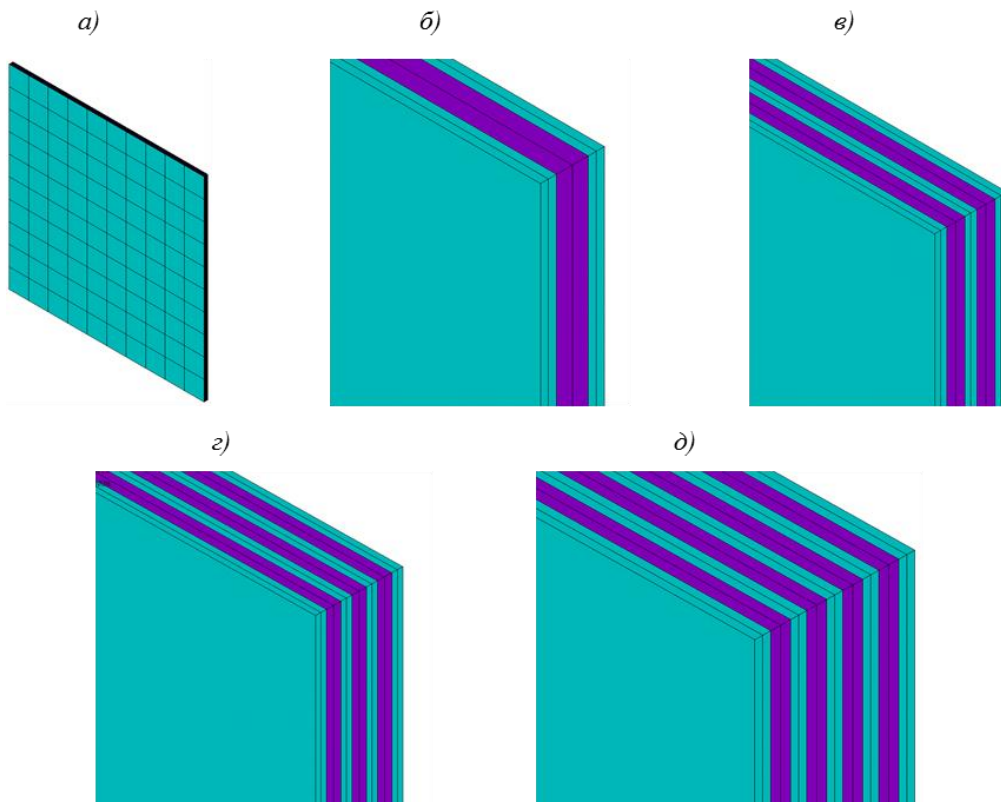


Рис. 3. Конечно-элементные модели слоистого образца из материалов 1 и 2:

a – общий вид образца в изометрии; b – трехслойный образец; c – пятислойный образец; d – семислойный образец; e – девятислойный образец

Соотношение нагрузок, воспринимаемых материалами композиции, в случае изотропных материалов слоев определяется по формуле

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{E_1 h_1}{E_2 h_2}, \quad (2)$$

где E – модуль упругости, ГПа; h – суммарная толщина слоев из данного материала, мм.

В данном случае при одинаковой суммарной толщине слоев напряжения в слое 1 будут в 2 раза выше, чем в слое 2, так как $E_1=2E_2$.

При расчете напряжений в слоях образца МКЭ получены напряжения в слоях 1 ($\sigma_1=6,78$ МПа) и 2 ($\sigma_2=3,39$ МПа) (рис. 4).

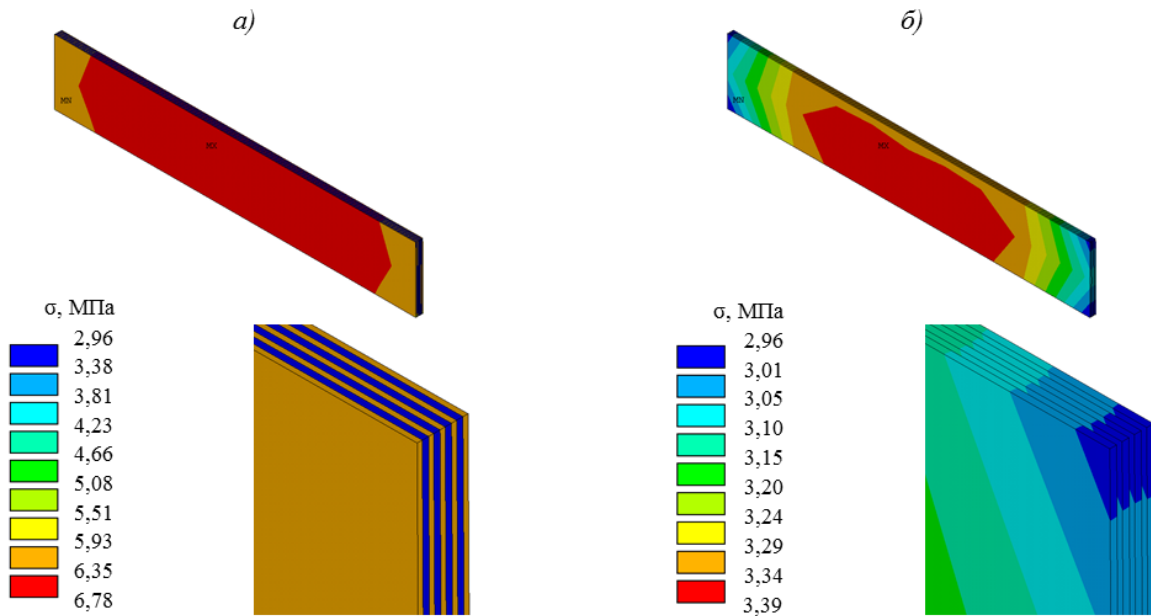


Рис. 4. Напряжения по Мизесу в слоистом образце для материалов 1 (а) и 2 (б)

Напряжения, которые возникают в слоистых образцах при нагрузке, не зависят от количества слоев, если не изменяется суммарная толщина разномодульных материалов (рис. 5).

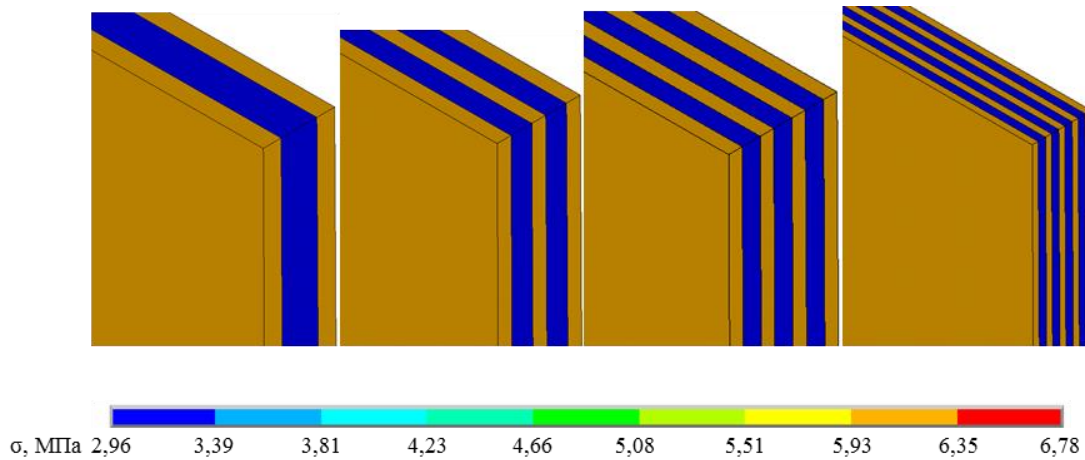


Рис. 5. Напряжения по Мизесу в слоистом материале при различном соотношении разномодульных слоев, но с их одинаковыми суммарными толщинами

Формулу для расчета напряжений в каждом слое слоистого материала можно представить в виде

$$\sigma = \frac{F}{S} \cdot J, \quad (3)$$

где F – сила, сжимающая слоистый образец; S – площадь поперечного сечения слоистого образца; J – коэффициент, который определяется графически в зависимости от соотношения модулей упругости материалов слоистого образца.

Для разработки модели расчета напряжений в слоистом материале в случае равной толщины разномодульных слоев рассмотрим три типа образцов, различных по толщине, ширине и площади поперечного сечения. Для каждого из слоистых образцов рассмотрим случаи, когда соотношения модулей упругости материалов слоев изменяются от 1,1 до 20 (модуль упругости высокомодульного материала всегда равен 200 ГПа), и для каждого случая найдем расчетный коэффициент J (табл. 2).

К модели слоистого образца приложена распределенная по верхней кромке сжимающая нагрузка, равная 10000 Н. Слои из материала 1 – суммарной толщиной $h_1=1$ мм, слои из материала 2 – суммарной толщиной $h_2=1$ мм и коэффициентом Пуассона $\mu=0,3$.

Таблица 2

Расчетные коэффициенты J для расчета напряжений в каждом слое слоистого образца в зависимости от значений соотношения модулей упругости его материалов в случае равной толщины разномодульных слоев

Условный номер строки	Определяемая величина*	Значения величины при соотношении E_1/E_2					
		1,1	2	4	8	10	20
1	J_1	1,07	1,36	1,63	1,8	1,85	1,94
2	J_2	1,07	0,68	0,41	0,23	0,19	0,1
3	$\sigma_{\max 1}^{50}$, МПа	53,5	67,8	81,3	90,4	92,4	96,8
4	$\sigma_{\max 2}^{50}$, МПа	53,5	34	20,5	11,5	9,5	5
5	$\sigma_{\max 1}^{100}$, МПа	107	136	163	180	185	194
6	$\sigma_{\max 2}^{100}$, МПа	107	68	41	23	19	10
7	$\sigma_{\max 1}^{200}$, МПа	214	272	326	360	371	388
8	$\sigma_{\max 2}^{200}$, МПа	214	136	81,6	45,3	37,1	19,4

* $\sigma_{\max 1}^{50}$, $\sigma_{\max 2}^{50}$ – максимальное напряжение в слое с модулем упругости E_1 и E_2 соответственно при отношении нагрузки, равной 50 МПа, к площади поперечного сечения образца размером $100 \times 100 \times 2$ мм; $\sigma_{\max 1}^{100}$, $\sigma_{\max 2}^{100}$ – максимальное напряжение в слое с модулем упругости E_1 и E_2 соответственно при отношении нагрузки, равной 100 МПа, к площади поперечного сечения образца размером $100 \times 50 \times 2$ мм; $\sigma_{\max 1}^{200}$, $\sigma_{\max 2}^{200}$ – максимальное напряжение в слое с модулем упругости E_1 и E_2 соответственно при отношении нагрузки, равной 200 МПа, к площади поперечного сечения образца размером $100 \times 50 \times 1$ мм.

По полученным результатам построим график зависимости расчетного коэффициента J для расчета напряжений в слоистом образце от соотношения модулей упругости его материалов в случае равной толщины разномодульных слоев (рис. 6).

Проанализировав данные табл. 1, получили систему уравнений, решив которую можно получить напряжения в слоях образца в случае равной толщины разномодульных слоев.

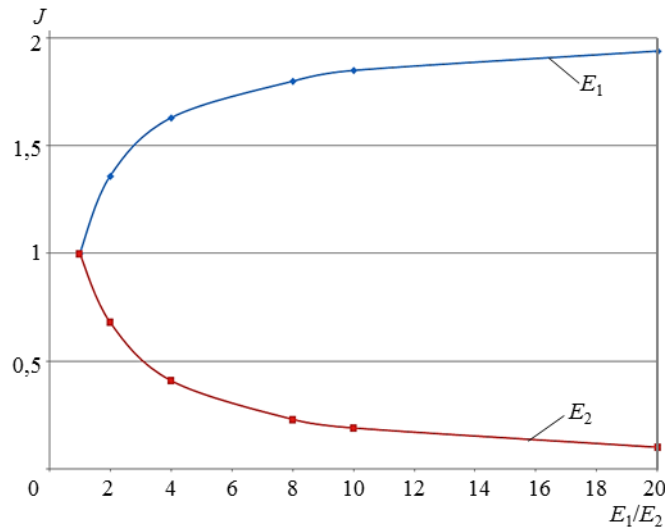


Рис. 6. Расчетный коэффициент J для расчета напряжений в слоистом образце в зависимости от соотношения модулей упругости его материалов в случае равной толщины разномодульных слоев

Предложенная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = 2 \frac{F}{S}; \\ \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \end{cases} \quad (4)$$

где S – площадь поперечного сечения пластины.

Зная модули упругости материалов слоев, значение приложенной силы и геометрические размеры пластины и решив данную систему уравнений, можно получить напряжения в слоях пластины в случае равной толщины разномодульных слоев. Например, рассмотрим случай (табл. 2), когда на пластину размером $100 \times 100 \times 2$ мм действует сила, равная 10000 Н, при соотношении модулей упругости пластины 1 к 4 (табл. 2, строки 3 и 4). Если суммарная толщина слоев высокомодульного материала равна суммарной толщине слоев низкомодульного материала, то

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{F}{S_1} + \frac{F}{S_2} = 2 \frac{F}{S} = \frac{20000}{0,0002} = 100 \text{ МПа}, \text{ т. е. } \sigma_1 = 100 \text{ МПа} - \sigma_2.$$

Из второго уравнения системы (4) получаем:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2} = 4.$$

Подставив первое уравнение системы (4) во второе, получим следующее выражение:

$$\frac{10^{11} - \sigma_2}{\sigma_2} = 4, \text{ где } \sigma_2 \approx 20 \text{ МПа, а } \sigma_1 \approx 80 \text{ МПа,}$$

что соответствует значениям напряжений, полученных МКЭ (табл. 2, строки 3 и 4).

Для оценки напряжений в слоистом композите, когда суммарная толщина высокомодульных слоев не равна суммарной толщине низкомодульных слоев, рассмотрим следующие случаи (табл. 3):

– слой из материала 1 суммарной толщиной $h_1=1$ мм, слой из материала 2 суммарной толщиной $h_2=3$ мм – отношение толщины низко модульных слоев к толщине высоко модульных слоев 3 к 1 (рис. 7, б);

– слой из материала 1 суммарной толщиной $h_1=1$ мм, слой из материала 2 суммарной толщиной $h_2=5$ мм – отношение толщины низко модульных слоев к толщине высоко модульных слоев 5 к 1 (рис. 7, в).

Остальные параметры модели задавались в соответствии с расчетами, представленными в табл. 2 (табл. 3, строки 3 и 4).

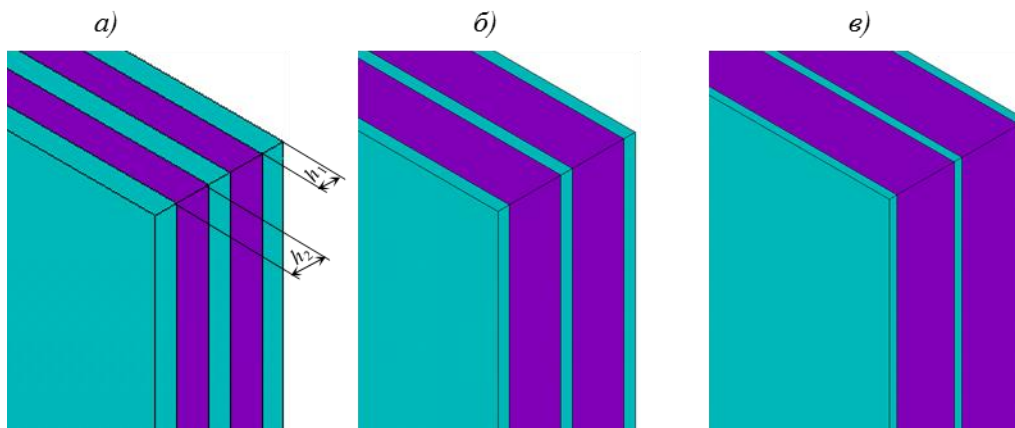


Рис. 7. Трехмерные модели слоистых пластин с соотношением суммарных толщин разно модульных слоев h_2/h_1 : 1 (а), 3 (б) и 5 (в)

Таблица 3

Расчетные коэффициенты J для расчета напряжений в каждом слое слоистого образца в зависимости от значений соотношения модулей упругости его материалов

Условный номер строки	Определяемая величина*	Значения величины при соотношении E_1/E_2					
		1,1	2	4	8	10	20
При соотношении толщин разно модульных слоев $h_2/h_1=1$							
1	J_1	1,07	1,36	1,63	1,8	1,85	1,94
2	J_2	1,07	0,68	0,41	0,23	0,19	0,1
3	$\sigma_{\max 1}^{50}$, МПа	53,5	67,8	81,3	90,4	92,4	96,8
4	$\sigma_{\max 2}^{50}$, МПа	53,5	34	20,5	11,5	9,5	5
При соотношении толщин разно модульных слоев $h_2/h_1=3$							
5	J_1	1,09	1,63	2,33	2,96	3,13	3,54
6	J_2	0,99	0,81	0,52	0,37	0,31	0,18
7	$\sigma_{\max 1}^{25}$, МПа	27,3	40,7	58,2	74	78,3	88,5
8	$\sigma_{\max 2}^{25}$, МПа	24,8	20,3	14,5	9,2	7,8	4,4
При соотношении толщин разно модульных слоев $h_2/h_1=5$							
9	J_1	1,1	1,75	2,71	3,76	4,07	4,88
10	J_2	1	0,87	0,68	0,47	0,41	0,25
11	$\sigma_{\max 1}^{17}$, МПа	18,4	29,1	45,2	62,6	67,8	81,4
12	$\sigma_{\max 2}^{17}$, МПа	16,7	14,5	11,3	7,83	6,79	4,1

* $\sigma_{\max 1}^{50}$, $\sigma_{\max 2}^{50}$ – максимальное напряжение в слое с модулем упругости E_1 и E_2 соответственно при отношении нагрузки, равной 50 МПа, к площади поперечного сечения образца размером $100 \times 100 \times 2$ мм; $\sigma_{\max 1}^{25}$, $\sigma_{\max 2}^{25}$ – максимальное напряжение в слое с модулем упругости E_1 и E_2 соответственно при отношении нагрузки, равной 25 МПа, к площади поперечного сечения образца размером $100 \times 100 \times 4$ мм; $\sigma_{\max 1}^{17}$, $\sigma_{\max 2}^{17}$ – максимальное напряжение в слое с модулем упругости E_1 и E_2 соответственно при отношении нагрузки, равной 17 МПа, к площади поперечного сечения образца размером $100 \times 100 \times 6$ мм.

По результатам расчетов, представленных в табл. 3, видно, что система уравнений (4) подходит только для случая с равной толщиной разномодульных слоев.

В случае различных толщин разномодульных слоев предложенная система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{F}{S_1 + S_2 \cdot \frac{E_2}{E_1}}; \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_1 \cdot E_2}{E_1}, \end{cases} \quad (5)$$

где S_n – площадь поперечного сечения слоя с индексом n ; E_n – модуль упругости материала с индексом n .

Полученная система уравнений (5) совпадает с формулами для расчета стержней из разнородных материалов [90].

Например, рассмотрим случай (табл. 3), когда на пластину размером $100 \times 100 \times 4$ мм действует сила, равная 10000 Н, при соотношении модулей упругости пластины 1 к 8:

$$\sigma_1 = \frac{10000}{0,0001 + 0,0003 \cdot \frac{25 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^{11}}} = 73 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 73/8 \approx 9,1 \text{ МПа},$$

что соответствует значениям напряжений, полученным МКЭ (табл. 3, строки 7 и 8).

Разработанная модель для расчета напряжений в слоистом материале применима только для слоистых КМ, состоящих из слоев монолитных изотропных материалов и не подходит для оценки напряжений слоистых КМ, состоящих из комбинации анизотропных и изотропных материалов, соединенных слоями клеевых составов.

Обсуждение и заключения

В статье представлены экспериментальные данные в виде результатов испытаний слоистого образца на потерю устойчивости при сжатии, так как это позволяет на практике определить напряжения в композитном образце и сравнить их с расчетными данными, полученными МКЭ. К результатам эксперимента оказались ближе результаты расчета по формуле Эйлера, при котором определялся усредненный модуль упругости образца, чем более точные результаты МКЭ, при расчете по которому учитываются свойства всех материалов образца. Это объясняется тем, что на точность испытания по определению критического напряжения потери устойчивости слоистого образца влияет много факторов, приводящих к расхождению результатов с расчетными данными: геометрические параметры образца, которые всегда имеют некоторую начальную кривизну; технология изготовления композиционного материала; условия проведения эксперимента и т. д.

Разница с экспериментом в расчетах не учитывается, так как адекватность полученных численных результатов оценивалась по общепринятой аналитической формуле (1), которая не требует экспериментальных подтверждений. Эксперимент не требуется для разработки модели по расчету напряжений в слоистом материале, а только иллюстрирует возможность определения напряжений в слоистом образце с помощью механического испытания и показывает возможное несоответствие расчетных и экспериментальных результатов.

Расчеты, проведенные в конечно-элементном программном комплексе ANSYS показали, что напряжения, которые возникают в слоистых образцах при нагрузке, не зависят от количества слоев, если не изменяется суммарная толщина разномодульных материалов.

Построен график зависимости расчетного коэффициента J для расчета напряжений в слоистом образце от соотношения модулей упругости его материалов в случае равной толщины разномодульных слоев.

Представлена система уравнений, которая позволяет определить напряжения в разномодульных материалах слоистой пластины, состоящей из слоев монолитных изотропных материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов Е.Н., Антипов В.В., Сенаторова О.Г., Лукина Н.Ф. Новый класс слоистых алюмокомпозитов на основе алюминий-литиевого сплава 1441 с пониженной плотностью // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Машиностроение. 2011. №SP2. С. 174–183.
2. Бузник В.М., Каблов Е.Н., Кошурина А.А. Материалы для сложных технических устройств арктического применения // Научно-технические проблемы освоения Арктики. М.: Наука, 2015. С. 275–285.
3. Бохоева Л.А. Особенности расчета на прочность элементов конструкций из изотропных и композиционных материалов с допустимыми дефектами. Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2007. С. 5–6.
4. Берт Ч.У., Мартиндейл Д.Л. Точный упрощенный метод исследования поведения тонких пластин при больших прогибах // Аэрокосмическая техника. 1988. №11. С. 131–138.
5. Бохоева Л.А. Устойчивость и рост круглых расслоений в слоистых элементах конструкций // Известия вузов. Машиностроение. 1989. №8. С. 12–15.
6. Бохоева Л.А. Влияние дефектов типа отслоений в слоистых пластинах на величину критической нагрузки // Вестник БГУ. 2005. Вып. 5. С. 243–264.
7. Дамдинов Т.А., Асеев А.В., Беляков А.В., Бохоева Л.А. Определение критических нагрузок с помощью энергетического критерия устойчивости // XII Туполевские чтения: междунар. молодеж. науч. конф.: материалы конф. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2004. С. 53.
8. Сборовский А.К., Савельев Н.Ф. Механизмы разрушения ориентированных стеклопластиков при сжатии // Вопросы судостроения. Технология судостроения. 1976. Вып. 12. С. 12–18.
9. Серенсен С.В., Зайцев Г.П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. Киев: Наукова думка, 1982. 295 с.
10. Сиратори М., Миеси Т., Мацусита Х. Вычислительная механика разрушения. М.: Мир, 1986. 336 с.
11. Chen H.P., Doong J.L. Postbuckling Behavior of a Thick Plate // AIAA Journal. 1983. Vol. 21. No. 8. P. 1157–1161.
12. Evams A.G., Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling on compressed films // International Journal of Solids and Structures. 1984. Vol. 20. No. 5. P. 455–466.
13. Fei Z., Yin W.L. Post Buckling growth of a circular delamination in a laminate under compression and bending // Proceedings of the Twelfth South-eastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics. Georgia Institute of Technology (May 10–11, 1984). Auburn. 1984. Vol. 2. P. 130–134.
14. Грищенко С.В. Расчет и проектирование изделий конструкций самолета из слоистых композитов с учетом межслойных эффектов // Труды МАИ. 2015. №84. С. 1–19.
15. Huang H., Kardomateas G. Buckling and initial postbuckling behavior of sandwich beams including transverse shear // AIAA Journal. 2002. Vol. 40. No. 11. P. 2331–2335.
16. Kim H.J. Postbuckling analysis of composite laminates // Computers and Structures. 1997. Vol. 62. No. 6. P. 975–983.
17. Григолюк Э.И., Коган Е.А., Мамай В.И. Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 1994. №2. С. 6–32.
18. Iihbaoko J. On the buckling of an Elliptic plate with Clamped Edge // Journal of the Physical Society of Japan. 1957. Vol. 12. No. 5. P. 529–532.
19. Williams J.G. On the calculation of energy release rates for cracked laminates // International Journal of Fracture. 1988. Vol. 36. P. 101–119.

20. Storakers B., Andersson B. Nonlinear plate theory applied to delamination in composites // *Journal of Mechanics and Physics solids*. 1988. Vol. 36. No. 6. P. 689–718.
21. Well N.A. Large Deflections of Elliptical Plates // *Journal of applied Mechanics*. 1956. Vol. 23. No. 1. P. 21–26.
22. Киселева Р.З., Гуреева Н.А., Киселев А.П. Расчет многослойной оболочки с использованием объемного конечного элемента // *Известия ВолгГТУ*. 2010. №4. С. 125–128.
23. Yin W.-L., Fei Z. Delamination buckling and growth in a champed circular plate // *AIAA Journal*. 1988. Vol. 26. No. 4. P. 438–445.
24. Yin W.-L., Wang J.T.S. The Energy-Release Rate in the Growth of a One-Dimensional Delamination // *Journal of applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. P. 939–941.
25. Сендецки Д. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978. Т. 2. 564 с.
26. Bottega W.J. Peeling of a cylindrical layer // *International Journal of Fracture*. 1988. Vol. 38. No. 1. P. 3–14.
27. Buchanan G.R., Hung Y.K., Chin H.J. Nonlinear analysis for a champed bar // *Transactions of the American society of Mechanical Engineers*. 1969. Vol. 36. No. 2. P. 355–357.
28. Chai H., Babcock C.D. Two-dimensional modeling of Compressive Failure in Delaminated laminates // *Journal of Composite materials*. 1985. Vol. 19. No. 1. P. 67–91.
29. Chan W.S., Wang A.S.D. A study on the effects of the 900 ply on matrix cracks in composite laminates // *AIAA/ASME/ASCE/AHC structures, structural: Dynamics and Materials Conference 27: Collection of Technical Papers*. 1986. Vol. 1. P. 689–694.
30. Shivacumar K.N., Whitcomb J.D. Buckling of Sublaminates in a Quasi-Isotropic Composite Laminate // *Journal of Composite materials*. 1985. Vol. 19. No. 1. P. 2–18.
31. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю. Моделирование слоистых композитов с конечными деформациями методом асимптотической гомогенизации // *Инженерный журнал: наука и инновации*. URL: <http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1405.html> (дата обращения: 25.10.2018).
32. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
33. Антохонов В.Б., Бохоева Л.А. Образование технологических напряжений в короблении в прессованных композитных пластинах // *Межвузовский сборник*. Иркутск, 2000. С. 56–60.
34. Болотин В.В. Дефекты типа расслоений в конструкциях из композиционных материалов // *Механика композиционных материалов*. 1984. №2. С. 239–256.
35. Си Д. Механика разрушения композитных материалов // *Механика композитных материалов*. 1979. №3. С. 434–446.
36. Тимошенко С.П., Войковский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
37. Трошин В.П. Влияние продольного расслоения в слоистой цилиндрической оболочке на величину критического внешнего давления // *Механика композитных материалов*. 1982. №5. С. 838–842.
38. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 399 с.
39. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.
40. Хеллан К. Введение в механику разрушения. М.: Мир, 1988. 364 с.
41. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкции. М.: Мир, 1971. 192 с.
42. Болотин В.В., Зебельян З.Х., Курзин Л.А. Устойчивость сжатых элементов с дефектами типа расслоений // *Проблемы прочности*. 1980. №7. С. 3–8.
43. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 264 с.
44. Черепанов Г.П. Механика разрушения многослойных оболочек. Теория трещин расслаивания // *Прикладная математика и механика*. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 832–845.
45. Budiaushy B. Theory of buckling and post buckling of elastic structures // *Advances in Applied Mechanics*. 1974. Vol. 14. P. 1–65.
46. Chen H.P., Doong J.L. Postbuckling Behavior of a Thick Plate // *AIAA Journal*. 1983. Vol. 21. No. 8. P. 1157–1161.

47. Dharen C.K.H. Fracture mechanics of Composite materials // *Journal of Materials and Technology*. 1978. Vol. 100. No. 3. P. 233–247.
48. Kulkarni S.V., Frederick D. Buckling of Partially Debonded Layered Cylindrical Shells // *AJAA Report*. 1973. No. 73. P. 9.
49. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 336 с.
50. Antipov V.V., Oreshko E.I., Erasov V.S., Serebrennikova N.Y. Hybrid laminates for application in north conditions // *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. No. 5. P. 973–990.
51. Бохоева Л.А., Антохонов В.Б., Зангеев Б.И. Теоретическая оценка максимальных размеров безопасных дефектов типа отслоений // *Проблемы механики современных машин: материалы Междунар. науч. конф. Улан-Удэ, 2000*. С. 14–15.
52. Бохоева Л.А., Дамдинов Т.А. Определение критических нагрузок энергетическим методом с учетом деформаций сдвига // *Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева*. 2006. №1. С. 3–8.
53. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю. Выбор схемы расположения высокомодульных слоев в многослойной гибридной пластине для ее наибольшего сопротивления потере устойчивости // *Авиационные материалы и технологии*. 2014. №S4. С. 109–117. DOI: 10.18577/2071-9140-2014-0-s4-109-117.
54. Викторов Е.Г. Подрастание и излом отслоений в композитах при сжатии // *Механика материалов и конструкций*. М.: Изд-во МЭИ, 1982. С. 36–40.
55. Тарнопольский Ю.М. Расслоение сжимающих стержней из композитов // *Разрушение композитных материалов*. Рига, 1979. С. 160–166.
56. Тарнопольский Ю.М., Хитров В.В., Шемшурин М.В., Василевский В.М. Опасность расслоения коротких металлокомпозитных стержней при осевом сжатии // *Механика полимеров*. 1978. №1. С. 2–33.
57. Трошин В.П. К устойчивости цилиндрических оболочек с расслоениями // *Механика композитных материалов*. 1981. №4. С. 729–731.
58. Bottega W.J., Maewal A. Delamination buckling and growth in lamination // *Journal Applied Mechanics*. 1983. Vol. 50. No. 1. P. 184–189.
59. Chai H., Babcock C.D., Knous W.G. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling // *International Journal of Solids and Structures*. 1981. Vol. 14. No. 11. P. 1069–1083.
60. Chen H.P. Shear deformation theory for compressive delamination buckling and growth // *AIAA Journal*. 1991. Vol. 29. No. 5. P. 813–819.
61. Kim S., Cho M. Efficient higher-order shell theory for laminated composites with multiple delaminations // *AIAA Journal*. 2003. Vol. 41. No. 5. P. 941–950.
62. Kulkarni S.V., Frederick D. Propagation of delamination in a layered cylindrical shell // *International Journal of Fracture*. 1973. Vol. 9. No. 1. P. 113–115.
63. Мысык Д.А., Шакимов Л.А. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости трехслойных стеклопластиковых цилиндрических оболочек // *Механика конструкций из композиционных материалов*. Киев: Наукова думка, 1977. С. 110–118.
64. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю., Луценко А.Н. Расчет на прочность гибридной панели крыла на базе листов и профилей из высокопрочного алюминий-литиевого сплава и слоистого алюмокомпозитного пластика // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №1 (40). С. 53–61. DOI: 10.185.77/2071-9140-2016-0-1-53-61.
65. Wang S.S., Zahlan N.M., Sicemasu H. Compressive stability of delamination random short-fiber composite // *Journal of composite materials*. 1985. Vol. 19. No. 4. P. 317–333.
66. Way S. Bending of Circular Plates with Large Deflection // *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. 1934. Vol. 23. No. 56. P. 627–636.
67. Whitcomb J.D. Finite element analysis of instability related delamination growth // *Journal of Composite Materials*. 1981. Vol. 15. P. 403–426.
68. Yin Wo-L., Sallam S.N., Simitsees C.J. Ultimate axial load capacity of a delaminated bam-plate // *AIAA Journal*. 1986. Vol. 24. No. 1. P. 123–128.

69. Коллеров М.Ю., Усиков В.Д., Куфтов В.С., Гусев Д.Е., Орешко Е.И. Медико-техническое обоснование использования титановых сплавов в имплантируемых конструкциях для стабилизации позвоночника // Титан. 2013. №1 (40). С. 39–45.
70. Гусев Д.Е., Коллеров М.Ю., Рудаков С.С., Королев П.А., Орешко Е.И. Оценка биомеханической совместимости имплантируемых опорных пластин из сплавов на основе титана и никелида титана методом компьютерного моделирования // Титан. 2011. №3 (33). С. 39–44.
71. Басов К.А. Графический интерфейс комплекса ANSYS. М.: ДМК Пресс, 2006. 248 с.
72. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Математическое моделирование деформирования конструкционного углепластика при изгибе // Авиационные материалы и технологии. 2016. №2 (41). С. 50–59. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-2-50-59.
73. Боровков А.И. Возможности системы конечно-элементного моделирования ANSYS/LS-DYNA // Сб. матер. I Междунар. конф. пользователей программного обеспечения ANSYS E. М.: ЕМТ-ANSYS-центр, 2003. С. 128–136.
74. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н., Терентьев В.Ф., Слизов А.К. Построение диаграмм деформирования в трехмерном пространстве σ - ϵ - t // Авиационные материалы и технологии. 2017. №1 (46). С. 61–68. DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-1-61-68.
75. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. ANSYS для инженеров: справ. пособ. М.: Машиностроение-1, 2004. 512 с.
76. Котов А.Г. Основы моделирования в среде ANSYS: учеб. пособие. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2008. 200 с.
77. Кравчук А.С., Смалюк А.Ф., Кравчук А.И. Электронная библиотека механики и физики: лекции по ANSYS с примерами решения задач в пяти частях. Минск: БГУ, 2013. Ч. 5. С. 105.
78. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Крылов В.Д. Построение трехмерных диаграмм деформирования для анализа механического поведения материала, испытанного при различных скоростях нагружения // Авиационные материалы и технологии. 2018. №2 (51). С. 59–66. DOI: 10.18577/2071-9140-2018-0-2-59-66.
79. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // Авиационные материалы и технологии. 2015. №1 (34). С. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33.
80. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. М.: Физматлит, 2013. С. 81–84.
81. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Особенности расчетов устойчивости стержней и пластин // Авиационные материалы и технологии. 2016. №4 (45). С. 74–79. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-4-74-79.
82. Коллеров М.Ю., Гусев Д.Е., Орешко Е.И. Экспериментально-теоретическое обоснование выбора метода и имплантатов для устранения воронкообразной деформации грудной клетки // Научные труды (Вестник МАТИ). 2012. №19 (91). С. 331–336.
83. Коллеров М.Ю., Егорова М.В., Орешко Е.И. и др. Экспериментально-теоретическое обоснование алгоритма раннего ортодонтического лечения детей с односторонней расщелиной губы и неба несъемными аппаратами // Стоматология детского возраста и профилактика. 2011. Т. X. №1 (36). С. 23–27.
84. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 34–41.
85. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. С. 20–27.
86. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Критические напряжения потери устойчивости в гибридных слоистых пластинах // Материаловедение. 2016. №11. С. 17–21.
87. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихачев К.К. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Гос. науч.-техн. изд-во машиностроительной лит., 1959. Т. 3. С. 764–768.
88. Орешко Е.И., Ерасов В.С. Численные исследования устойчивости пластин с шарнирно закрепленными поперечными кромками // Деформация и разрушение материалов. 2018. №6. С. 7–11.
89. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Качан Д.В., Лашов О.А. Исследования устойчивости стержней и пластин с защемленными поперечными кромками. // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2018. №9 (69). Ст. 07. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 19.10.2018). DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-9-61-70.
90. Беляев Н.М. Соппротивление материалов. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1953. С. 83–85.