

УДК 620.1

*Е.И. Орешко¹, В.С. Ерасов¹, Д.В. Качан¹, О.А. Лашов¹***ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН ПРИ СЖАТИИ С ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ КРОМКАМИ**

DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-9-61-70

Представлены результаты теоретических (численных и аналитических) и экспериментальных исследований упругой устойчивости при сжатии прямоугольных стержней и пластин, защемленных по двум поперечным кромкам, при варьировании соотношений размеров и значений упругих постоянных. Оценена степень соответствия численных решений, полученных методом конечных элементов, с данными аналитических и экспериментальных решений для стержней и прямоугольных пластин. Представлена формула для расчета устойчивости пластин по Эйлеру с учетом коэффициента Пуассона.

Ключевые слова: расчет устойчивости, пластина, стержень, метод конечных элементов, критическая сила потери устойчивости.

*E.I. Oreshko¹, V.S. Erasov¹, D.V. Kachan¹, O.A. Lashov¹***RESEARCHES OF STABILITY OF CORES AND PLATES AT COMPRESSION WITH THE JAMMED CROSS-SECTION EDGES**

In work results theoretical (numerical and analytical) and pilot studies of elastic stability are presented at compression of rectangular cores and the plates jammed on two cross-section edges, at a variation of ratios of the sizes and values of elastic constants. Degree of compliance of the numerical decisions received by a method of final elements, with data of analytical and experimental decisions for cores and rectangular plates is estimated. The formula for calculation of stability of plates for Euler taking into account Poisson's factor is presented.

Keywords: stability calculation, plate, core, method of final elements, critical force of loss of stability.

¹Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal State Unitary Enterprise «All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials» State Research Center of the Russian Federation]; e-mail: admin@viam.ru

Введение

Экспериментально и теоретически установлено, что возможность применения того или иного расчетного метода зависит от соотношения размеров тела [1]. Поэтому в строительной механике по геометрическому признаку все элементы расчетных моделей традиционно классифицируются на три типа:

1. Стержень (рис. 1, *a*) – прямолинейный объект, у которого один из размеров намного больше двух других, т. е. два размера (b и h) находятся в пределах одного порядка, а третий (l) находится в пределах другого (большого) порядка.

Основными характеристиками стержня являются его ось (геометрическая форма оси) и поперечное сечение (геометрические характеристики профиля).

2. Оболочка (рис. 1, *б*) – объект, у которого один из размеров значительно меньше двух других, т. е. два размера (b и l) находятся в пределах одного порядка, а третий (h) находится в пределах другого (меньшего) порядка. В расчетной схеме оболочку представляют срединной поверхностью и толщиной.

Частным случаем оболочки является пластина (плита) – оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость (рис. 1, в).

3. Трехмерное тело (массив – рис. 1, г) – объект, у которого все три габарита соизмеримы, т. е. находятся в пределах одного порядка.

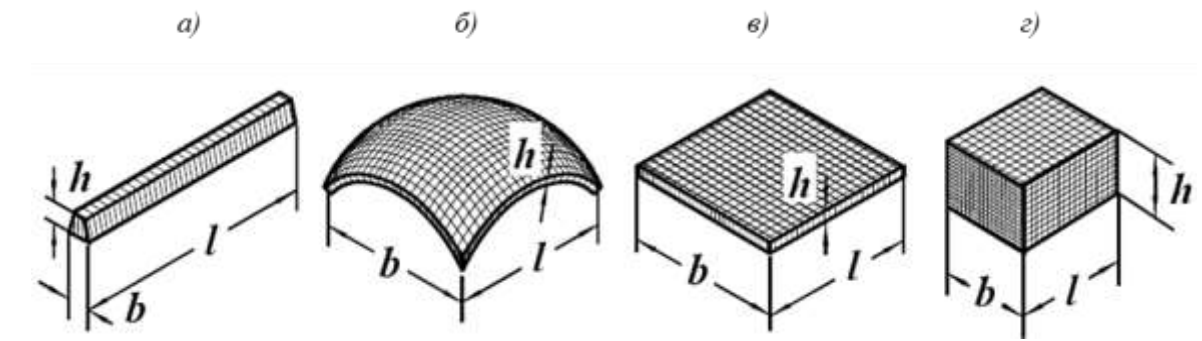


Рис. 1. Основные типы расчетных моделей:
а – стержень; б – оболочка; в – пластина; г – трехмерное тело

Задачи устойчивости стержней и пластин решаются в рамках классических теорий, основанных на гипотезах Эйлера–Бернулли (стержни) и Кирхгофа (пластины). В частности, классическая теория изгиба стержней основана на гипотезе плоских сечений. Предполагается также, что напряжения в направлениях, перпендикулярных к продольным волокнам, пренебрежимо малы [2, 3]. При построении прочностных моделей тонких пластин обычно используются две основные гипотезы – гипотеза жесткой нормали, аналогичная гипотезе плоских сечений при изгибе и растяжении стержней, и гипотеза двухосного напряженного состояния пластины (нормальными и касательными напряжениями в площадках, перпендикулярных поверхности пластины, можно пренебречь) [4–6].

Критическая сила потери устойчивости $P_{кр}$ для стержня при сжатии определяется по формуле Эйлера [7–9]:

$$P_{кр(1)} = \frac{E\pi^2 J_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (1)$$

где l – длина стержня; μ – коэффициент приведения длины (при заземленных концах стержня $\mu=0,5$); J_{\min} – минимальный момент инерции стержня (для стержня прямоугольного сечения $J_{\min}=bh^3/12$, где b, h – ширина и толщина стержня).

Критическая сила потери устойчивости пластины при сжатии определяется по формуле [10–15]:

$$P_{кр(2)} = K \frac{\pi^2 D}{b}, \quad (2)$$

$$K = \left(\frac{2b}{a}\right)^2, \quad (3)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (4)$$

где K – усредненный коэффициент устойчивости; D – цилиндрическая жесткость пластины; a, b, h – длина, ширина и толщина пластины; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины.

Выбор формулы для расчета устойчивости пластины основывается на анализе ее геометрической формы – в частности, пластину условно можно принять за стержень с тонким прямоугольным сечением и при расчете критической силы потери устойчивости применить формулу Эйлера. Однако некоторые авторы [16] предполагают, что стержень прямоугольной формы может быть условно принят за пластину только в условиях цилиндрического изгиба. К тому же при расчетах устойчивости пластин результаты, полученные по формулам (1) и (2), могут существенно различаться [17–21]. Это связано с тем, что в формуле (2) в отличие от формулы Эйлера учитывается коэффициент Пуассона материала. Причем чем больше ширина пластины, тем больше влияние коэффициента Пуассона на устойчивость пластины при сжатии [22].

В работе проведена оценка степени соответствия численных решений критических нагрузок при сжатии их значениям, полученным по аналитическим формулам, для прямоугольной пластины с зацепленными поперечными кромками при различных геометрических и физико-механических параметрах.

Работа выполнена в рамках реализации комплексной научной проблемы 3.3. «Технология прогнозирования свойств, моделирования и реализации современных процессов конструирования и производства изделий из неметаллических и композиционных материалов с использованием цифровых методов, совместимых с CAD/CAM/CAE и PLM системами» («Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года») [23–25].

Материалы и методы

Для проведения испытаний на потерю устойчивости при сжатии использовались пластины из алюминиевого сплава 1441 (рис. 2).

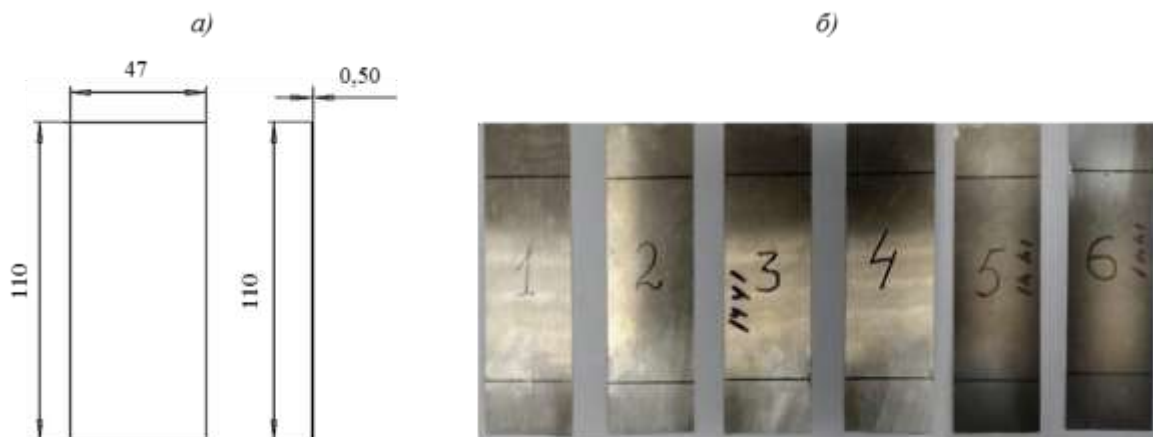


Рис. 2. Эскиз образца (а) и фотографии пластин из сплава 1441 (б) для испытаний на потерю устойчивости при сжатии

Рассчитывали однородные пластины постоянной толщины с заземленными поперечными кромками. Расчет критических усилий выполнен аналитически по формулам (1), (2) и методом конечных элементов (МКЭ) на основе бифуркационной постановки задачи с использованием программного комплекса ANSYS Mechanical APDL 14.5. Бифуркационная постановка задачи устойчивости базируется на следующих предположениях: начальное невозмущенное состояние равновесия тела описывается уравнениями линейной теории упругости; зависимости закона Гука справедливы не только для начального состояния, но и при малых отклонениях от него; изменениями размеров и формы тела в начальном состоянии можно пренебречь (тело напряжено, но не деформировано) [26]. Использование этих предположений дает возможность свести

задачу устойчивости к задаче на собственные значения для линейных однородных уравнений нейтрального равновесия пластины при заданных краевых условиях. Из условия существования нетривиального решения этих уравнений определяются критические параметры нагружения и с точностью до произвольной постоянной – конфигурация пластины после потери устойчивости.

При создании модели использовали многослойные оболочечные конечные элементы SHELL181. Данные элементы имеют форму прямоугольника с четырьмя узлами по углам. Нагружение пластины осуществляли заданием распределенных усилий на ее коротких гранях.

Для проверки адекватности математической компьютерной модели полученные с помощью МКЭ результаты сравнивали с результатами расчета по формулам (1) и (2) для четырех значений коэффициента Пуассона. Приняты следующие условия: размеры стержня $2 \times 0,02$ м, толщина 0,002 м; материал – алюминий ($E=70$ ГПа). При разбиении стержня на конечные элементы приняты следующие условия: один конечный элемент – на толщину стержня; 10 конечных элементов – на ширину стержня; 100 конечных элементов – на длину стержня.

Можно отметить совпадение результатов расчетов по МКЭ с результатами расчетов по формуле Эйлера (табл. 1). При увеличении значений ν увеличивается разность в расчетах $P_{кр}$ по формулам (1) и (2), причем при $\nu=0,45$ она составляет 20,42%.

Таблица 1

Результаты расчетов устойчивости тонкого ($b/h > 10$) стержня по аналитическим формулам и с помощью метода конечных элементов (МКЭ)

ν	$P_{кр(1)}$	$P_{кр(2)}$	$P_{кр МКЭ}$	$100 - (P_{кр(1)} / P_{кр(2)}) \cdot 100, \%$
	Н			
0	9,2	9,2	9,2	0
0,1	9,2	9,3	9,2	1,3
0,3	9,2	10,1	9,2	9,1
0,45	9,2	11,6	9,2	20,4

Результаты расчетов стержня с использованием программного комплекса ANSYS соответствуют результатам расчетов по формуле Эйлера, что свидетельствует об адекватности математической модели, которая будет взята за основу для дальнейших расчетов устойчивости.

Результаты и обсуждение

Проведены испытания на потерю устойчивости образцов из сплава 1441 при 20°C с различными скоростями перемещения активного захвата. Модуль упругости при сжатии пластины – $E=80$ ГПа, размеры образца $110 \times 47 \times 0,5$ мм, коэффициент приведения длины – $\mu=0,5$. Испытания образцов осуществляли в два этапа:

I – нагружение пластины до деформации, равной 0,2%, с дальнейшей полной разгрузкой образца;

II – повторное нагружение образца до величины перемещения активного захвата, равного 80% от исходного расстояния между захватами.

Проведенные испытания не показали зависимости критической силы потери устойчивости от скорости нагружения образца (рис. 3, а).

При повторном нагружении критическая сила потери устойчивости образца была на 2–10% ниже критической силы потери устойчивости образца при первом нагружении, что вызвано пластической деформацией образца при первом нагружении

в области крепления его в захватах испытательной машины, из-за которой в образце появляется небольшой исходный прогиб (рис. 3, б).

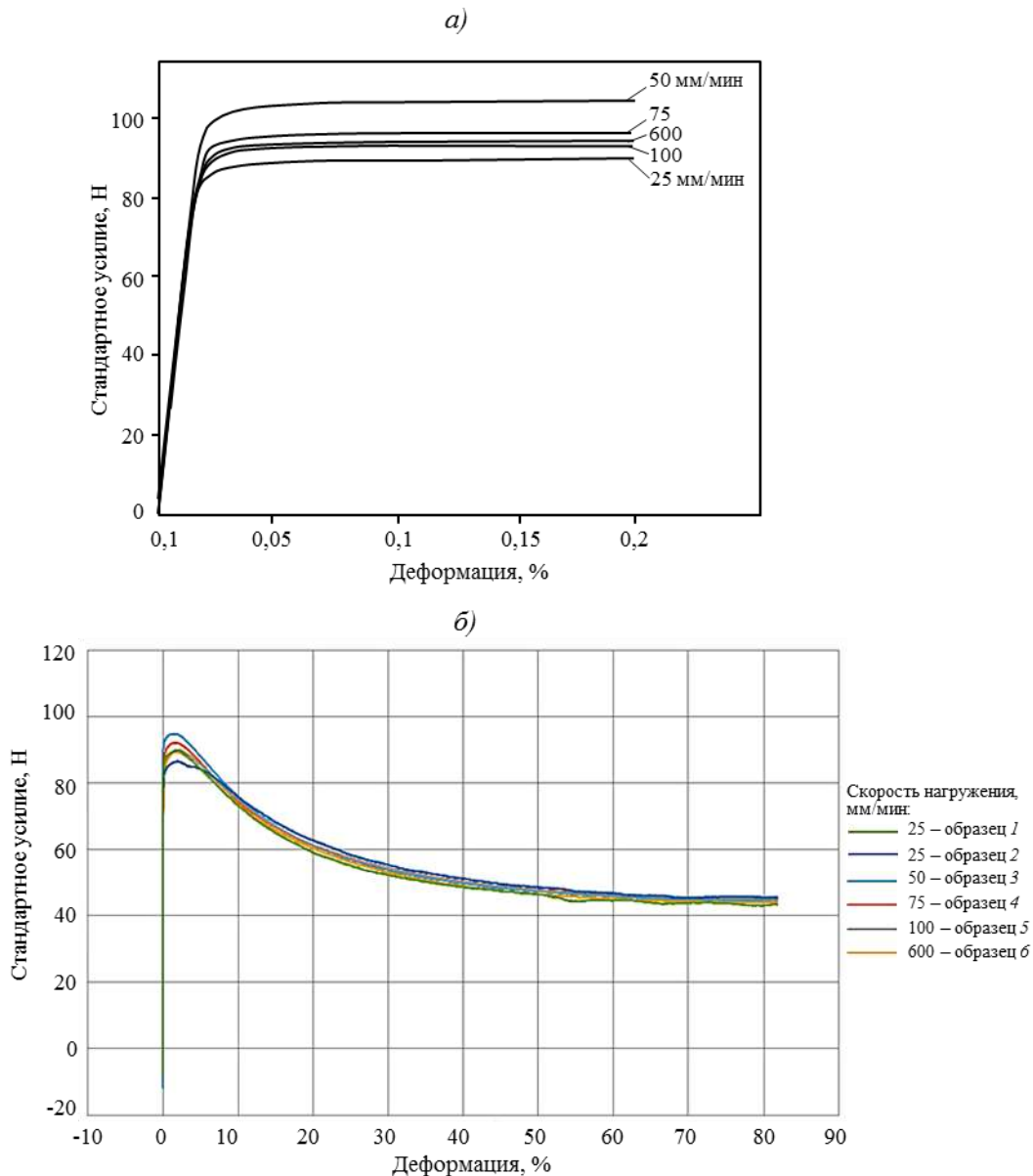


Рис. 3. Диаграмма сжатия образца до деформации 0,2 (а) и 80% (б) при различной скорости нагружения

Результаты эксперимента отличались от результатов, полученных по формуле Эйлера, на 18–30%. При сравнении экспериментальных данных с результатами, полученными по формуле для расчета устойчивости пластин, разница с расчетом составляла 25–37%. Результаты, полученные с помощью МКЭ, были больше, чем результаты расчетов, полученные по формуле (1), но меньше, чем результаты расчетов, полученные по формуле (2) (табл. 2).

Расхождение в расчетных и экспериментальных значениях критической силы потери устойчивости образцов объясняется высокой чувствительностью характеристики к геометрическим размерам образца, который всегда имеет некоторую (хотя бы и небольшую) начальную кривизну.

**Результаты испытаний на потерю устойчивости образцов из сплава 1441
и их сравнение с расчетными данными***

Условный номер образца	Скорость нагружения, мм/мин	Значения критической силы потери устойчивости, Н, при эксперименте по этапу		$\frac{P_{кр I} - P_{кр II}}{P_{кр II}}$	$\frac{P_{кр I} - P_{кр (1)}}{P_{кр (1)}}$	$\frac{P_{кр I} - P_{кр (2)}}{P_{кр (2)}}$
		I ($P_{кр I}$)	II ($P_{кр II}$)			
1	25	88,9	86,6	2,66	-30,44	-36,69
2	25	96,4	89,9	7,23	-24,57	-31,35
3	50	104,6	94,7	10,45	-18,15	-25,51
4	75	94,1	92,1	2,17	-26,37	-32,99
5	100	92,6	89,8	3,12	-27,54	-34,06
6	600	93,9	89,3	5,15	-26,53	-33,13

* Критическая сила потери устойчивости $P_{кр}$ при расчете по формулам (1) и (2) соответственно 127,8 и 140,43 Н, а при расчете с помощью метода конечных элементов 135,18 Н.

Расчеты критической силы потери устойчивости $P_{кр}$ при распределенной сжимающей нагрузке P выполнены для заземленных по двум поперечным граням пластин с различными упругими свойствами: модулем упругости 70; 110 и 210 ГПа; коэффициентом Пуассона, равном 0,1; 0,3 и 0,45. Геометрические размеры пластин: длина $a=0,1$ м, толщина $h=0,002$ м, ширина b – переменная.

При разбиении модели на конечные элементы приняты следующие условия: один конечный элемент – на толщину пластины; по 100 конечных элементов – на ширину и длину пластины. Результаты расчета по МКЭ с использованием программного комплекса ANSYS сравнивали с результатами аналитических решений по формулам (1) и (2). В качестве примера в табл. 3 приведены значения $P_{кр}$ для алюминиевых пластин ($E=70$ ГПа).

**Сравнение результатов расчетов устойчивости заземленных
по двум поперечным кромкам алюминиевых пластин
по аналитическим формулам и с помощью МКЭ ($E=70$ ГПа)**

b , м	a/b	$P_{кр (1)}$	$\nu=0,1$		$\nu=0,3$		$\nu=0,45$	
			$P_{кр, МКЭ}$	$P_{кр (2)}$	$P_{кр, МКЭ}$	$P_{кр (2)}$	$P_{кр, МКЭ}$	$P_{кр (2)}$
0,200	0,50	36846,52	37080,13	37218,71	39943,48	40490,68	44891,47	46202,54
0,133	0,75	24502,94	24650,16	24750,44	26504,42	26926,31	29659,66	30724,69
0,100	1,00	18423,26	18525,42	18609,36	19825,29	20245,34	21975,58	23101,27
0,080	1,25	14738,61	14812,66	14887,48	15768,12	16196,27	17319,48	18481,01
0,067	1,50	12343,59	12399,77	12468,27	13140,10	13564,38	14328,87	15477,85
0,057	1,75	10501,26	10543,39	10607,33	11128,18	11539,85	12058,39	13167,72
0,050	2,00	9211,63	9245,24	9304,68	9726,40	10122,67	10486,83	11550,63
0,044	2,25	8106,24	8132,72	8188,12	8528,84	8907,95	9150,80	10164,56
0,040	2,50	7369,30	7391,28	7443,74	7732,56	8098,14	8265,34	9240,51
0,036	2,75	6632,37	6649,94	6699,37	6937,99	7288,32	7384,11	8316,46
0,033	3,00	6079,68	6094,14	6141,09	6343,20	6680,96	6726,40	7623,42
0,031	3,25	5711,21	5723,57	5768,90	5947,28	6276,06	6289,67	7161,39
0,029	3,50	5342,75	5353,10	5396,71	5552,07	5871,15	5854,47	6699,37
0,027	3,75	4974,28	4983,74	5024,53	5157,46	5466,24	5421,18	6237,34
0,025	4,00	4605,82	4612,47	4652,34	4763,67	5061,34	4990,21	5775,32
0,024	4,25	4421,58	4427,34	4466,25	4567,12	4858,88	4775,79	5544,30
0,022	4,50	4053,12	4057,17	4094,06	4177,97	4453,98	4349,06	5082,28
0,021	4,75	3868,88	3877,19	3907,96	3979,30	4251,52	4137,06	4851,27
0,020	5,00	3684,65	3687,11	3721,87	3784,07	4049,07	3925,97	4620,25

Следует отметить линейную зависимость аналитических рассчитанных значений $P_{кр}$ от ширины пластины. В частности, для пластин шириной 2 см ($a/b=5$) и 20 см ($a/b=0,5$) значения $P_{кр}$ различаются в десять раз, т. е. пропорционально различию в размерах пластины. С увеличением ширины пластины растет различие в результатах расчетов по формуле (1) и МКЭ (табл. 4).

Таблица 4

Степень совпадения результатов расчетов устойчивости пластин, защемленных по двум поперечным кромкам, по аналитическим формулам* и МКЭ, %

a/b	$\nu=0,1$			$\nu=0,3$			$\nu=0,45$		
	c	d	f	c	d	f	c	d	f
0,50	0,63	-0,37	-1,00	8,41	-1,35	-9,00	21,83	-2,84	-20,25
0,75	0,60	-0,41	-1,00	8,17	-1,57	-9,00	21,05	-3,47	-20,25
1,00	0,55	-0,45	-1,00	7,61	-2,07	-9,00	19,28	-4,87	-20,25
1,25	0,50	-0,50	-1,00	6,99	-2,64	-9,00	17,51	-6,29	-20,25
1,50	0,46	-0,55	-1,00	6,45	-3,13	-9,00	16,08	-7,42	-20,25
1,75	0,40	-0,60	-1,00	5,97	-3,57	-9,00	14,83	-8,42	-20,25
2,00	0,36	-0,64	-1,00	5,59	-3,91	-9,00	13,84	-9,21	-20,25
2,25	0,33	-0,68	-1,00	5,21	-4,26	-9,00	12,89	-9,97	-20,25
2,50	0,30	-0,70	-1,00	4,93	-4,51	-9,00	12,16	-10,55	-20,25
2,75	0,26	-0,74	-1,00	4,61	-4,81	-9,00	11,33	-11,21	-20,25
3,00	0,24	-0,76	-1,00	4,33	-5,06	-9,00	10,64	-11,77	-20,25
3,25	0,22	-0,79	-1,00	4,13	-5,24	-9,00	10,13	-12,17	-20,25
3,50	0,19	-0,81	-1,00	3,92	-5,43	-9,00	9,58	-12,61	-20,25
3,75	0,19	-0,81	-1,00	3,68	-5,65	-9,00	8,98	-13,09	-20,25
4,00	0,14	-0,86	-1,00	3,43	-5,88	-9,00	8,35	-13,59	-20,25
4,25	0,13	-0,87	-1,00	3,29	-6,00	-9,00	8,01	-13,86	-20,25
4,50	0,10	-0,90	-1,00	3,08	-6,20	-9,00	7,30	-14,43	-20,25
4,75	0,08	-0,92	-1,00	2,85	-6,40	-9,00	6,93	-14,72	-20,25
5,00	0,07	-0,93	-1,00	2,70	-6,54	-9,00	6,55	-15,03	-20,25

* Аналитические формулы

$$c: \frac{P_{кр, МКЭ} - P_{кр(1)}}{P_{кр(1)}} \cdot 100; d: \frac{P_{кр, МКЭ} - P_{кр(2)}}{P_{кр(2)}} \cdot 100; f: \frac{P_{кр(1)} - P_{кр(2)}}{P_{кр(2)}} \cdot 100.$$

Для широких пластин тенденция иная: при уменьшении ширины пластины увеличивается различие в результатах расчетов по формуле (2) и расчетов по МКЭ. Для пластины с соотношением сторон $a/b=2,75$ с $\nu=0,3$ и $\nu=0,45$ результат расчета по МКЭ является средним значением результатов, полученных по формулам (1) и (2). Таким образом, результаты численных расчетов при $a/b \geq 2,75$ приближаются к результатам, полученным по формуле (1), а при $a/b \leq 2,75$ – к результатам, полученным по формуле (2), и $P_{кр(1)} \leq P_{кр, МКЭ} \leq P_{кр(2)}$. Значения коэффициентов устойчивости, полученные по МКЭ, незначительно отличаются от значений, полученных аналитически по формуле (2) (рис. 4), что свидетельствует об адекватности численных расчетов. Расчетные коэффициенты K_{ANSYS} определяли по формуле

$$K_{ANSYS} = \frac{P_{кр(ANSYS)} b}{\pi^2 D}. \quad (5)$$

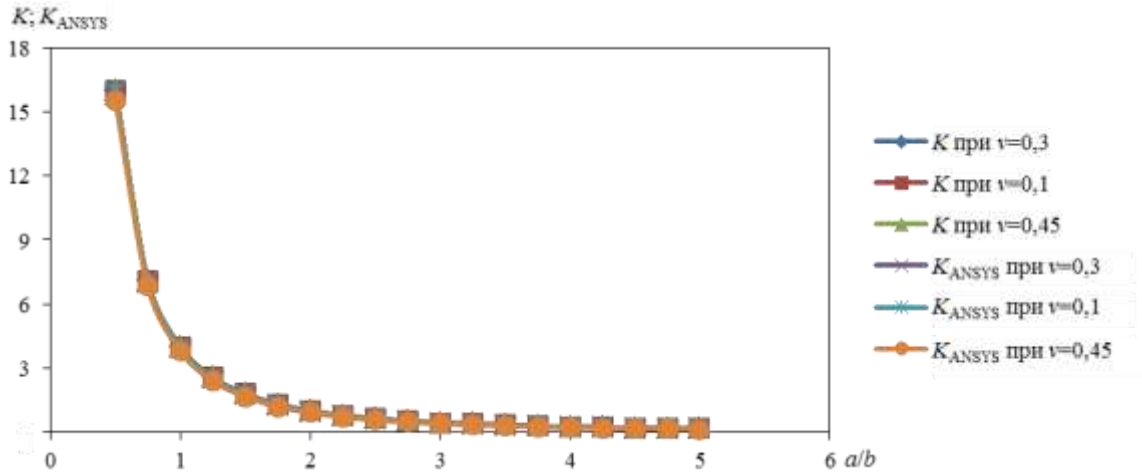


Рис. 4. Зависимость коэффициента K для защемленных кромок пластины от соотношения a/b (длина/ширина) и коэффициента Пуассона пластины:

K – значения расчетного коэффициента, полученные аналитически по формуле (2); K_{ANSYS} – значения расчетного коэффициента, полученные с помощью МКЭ

С увеличением коэффициента Пуассона значение критической силы потери устойчивости пластины растет, растет и различие в результатах расчетов по МКЭ и аналитическим формулам (табл. 3). При изменении модуля упругости пластины погрешность численных расчетов относительно результатов, полученных по формулам (1) и (2), не изменяется.

Во всех рассмотренных случаях различие в результатах расчетов по формулам (1) и (2) для ν , равном 0,1; 0,3 и 0,45, составляет ~1; 9 и 20,25% соответственно. Таким образом, результаты расчетов по формуле (1) отличаются от результатов расчетов по формуле (2) в $100\nu^2$ раз. Отсюда формулу для расчета устойчивости пластины по Эйлеру с учетом коэффициента Пуассона можно представить как

$$P_{кр(2)} = \frac{P_{кр(1)}}{1-\nu^2}. \quad (6)$$

Заключения

Результаты проведенных испытаний на потерю устойчивости образцов из сплава 1441 с различными скоростями деформирования показали, что скорость деформирования не влияет на критическую силу потери устойчивости.

Сравнение результатов расчета по формуле Эйлера с результатами эксперимента показывает, что результаты расчета выше экспериментальных данных на 18–30%. При сравнении экспериментальных данных с результатами, полученными по формуле для расчета устойчивости пластин, разница с расчетом была в интервале 25–37%.

Расхождение в расчетных и экспериментальных значениях критической силы потери устойчивости образцов объясняется высокой чувствительностью данной характеристики к геометрической форме образца, который всегда имеет некоторую (хотя бы и небольшую) начальную кривизну.

Значения критической силы потери устойчивости пластин, полученные методом конечных элементов (МКЭ) в программном комплексе ANSYS, превышают значения, полученные по формуле Эйлера для стержней, но меньше результатов расчетов, полученных по формуле для пластин.

Без учета коэффициента Пуассона результаты численных расчетов по МКЭ соответствуют результатам, полученным по формуле Эйлера. С увеличением коэффициента Пуассона повышается отличие результатов численного и аналитических расчетов.

Результаты расчетов по МКЭ при $a/b \geq 2,75$ приближаются к результатам, полученным по формуле Эйлера, а при $a/b \leq 2,75$ – к результатам, полученным по формуле для расчета устойчивости пластин.

Степень совпадения результатов расчетов устойчивости пластин по формуле Эйлера и формуле для пластин пропорциональна квадрату коэффициента Пуассона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбаков В.А. Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 207 с.
2. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5: Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. С. 12–13.
3. Жилин П.А. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2012. С. 27–28.
4. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов: учеб. пособие. М.: Наука, 1986. 560 с.
5. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. С. 20–21.
6. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1974. 808 с.
7. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов: учеб. пособие для ун-тов. М.: Физмат, 1962. С. 301–302.
8. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. С. 513–516.
9. Александров А.В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. М.: Высшая школа, 2003. С. 408–411.
10. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихачев К.К. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. М.: Гос. науч.-технич. изд-во машиностроит. лит., 1959 г. Т. 3. С. 964–987.
11. Короткин Я.И., Локшин А.З., Сиверс Н.Л. Изгиб и устойчивость пластин и круговых цилиндрических оболочек // Строительная механика корабля. Л.: Судпромгиз, 1955. С. 174–236.
12. Курдюмов А.А., Локшин А.З., Иосифов Р.А., Козляков В.В. Строительная механика корабля и теория упругости. Л.: Судостроение, 1968. С. 146–151.
13. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. Киев: Будивельник, 1970. С. 286–297.
14. Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я., Суздальцев Я.Я. Справочная книга по расчету самолета на прочность. М.: Оборонгиз, 1954. С. 411–412.
15. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. С. 91–94.
16. Немировский Ю.В., Горынин Г.Л. Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней и плит // Вестник Нижегород. ун-та им. Н.И. Лобачевского. 2011. №4 (4). С. 1654–1656.
17. Antipov V.V., Oreshko E.I., Erasov V.S., Serebrennikova N.Y. Hybrid laminates for application in north conditions // Mechanics of Composite Materials. 2016. Vol. 52. No. 5. P. 973–990.
18. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Критические напряжения потери устойчивости в гибридных слоистых пластинах // Материаловедение. 2016. №11. С. 17–21.
19. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Особенности расчетов устойчивости стержней и пластин // Авиационные материалы и технологии. 2016. №4 (45). С. 74–79. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-4-74-79.
20. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю. Выбор схемы расположения высокомодульных слоев в многослойной гибридной пластине для ее наибольшего сопротивления потере устойчивости // Авиационные материалы и технологии. 2014. №S4. С. 109–117. DOI: 10.18577/2071-9140-2014-0-s4-109-117.

21. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю., Луценко А.Н. Расчет на прочность гибридной панели крыла на базе листов и профилей из высокопрочного алюминий-литиевого сплава и слоистого алюмокомпозита // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. №1 (40). С. 53–61. DOI: 10.185.77/2071-9140-2016-0-1-53-61.
22. Романовский В.П. Справочник по холодной штамповке. 6-е изд., перераб. и доп. Л.: Машиностроение, 1979. С. 52–53.
23. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // *Авиационные материалы и технологии*. 2015. №1 (34). С. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33.
24. Каблов Е.Н., Гриневич А.В., Ерасов В.С. Характеристики прочности металлических авиационных материалов и их расчетные значения // 75 лет. *Авиационные материалы*. Избранные труды «ВИАМ» 1932–2007: юбилейный науч.-технич. сб. М.: ВИАМ, 2007. С. 370–379.
25. Каблов Е.Н. Материалы нового поколения – основа инноваций, технологического лидерства и национальной безопасности России // *Интеллект и технологии*. 2016. №2 (14). С. 16–21.
26. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. М.: Физматлит, 2013. С. 81–84.