

УДК 620.1

Н.Ю. Подживотов<sup>1</sup>

## ЭКСПРЕСС-МЕТОД СРАВНИТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ УРОВНЕЙ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

DOI: 10.18577/2307-6046-2019-0-10-111-124

*Рассмотрен экспресс-метод сравнительной оценки уровней свойств материалов по экспериментальным данным в условиях эмпирической неопределенности. Выбор преимущественного материала проводится посредством сравнения вероятностных оценок уровней значений характеристик ряда материалов с относительно близкими уровнями свойств. Метод позволяет проводить комплексное ранжирование сравниваемых материалов по уровню их свойств и выявлять преимущественный материал, обладающий наибольшим уровнем свойств. При этом характеристики материала, по которым проводится сравнение, считаются равнозначными.*

**Ключевые слова:** вероятностные оценки, экспериментальные данные, уровни свойств, характеристики материалов, анализ данных, сравнение, преимущественный выбор.

N.Yu. Podzhivotov<sup>1</sup>

## EXPRESS METHOD OF A COMPARATIVE ASSESSMENT PROPERTIES LEVELS OF MATERIALS

*The article is about the express method of a comparative assessment of levels properties of materials on experimental data in the conditions of the empirical uncertainty. The choice of a preferential material is carried out by means of comparisons of probabilistic estimates levels of values of materials characteristics with close levels of properties. The method allows to carry out the complex ranging of compared materials on level properties and to reveal the preferential material possessing with the greatest levels of properties. The characteristics of materials on which comparison is carried out, are considered the equivalent for the choice.*

**Keywords:** probabilistic estimates, experimental data, levels of properties, characteristics of materials, analysis of data, comparison, preferential choice.

---

<sup>1</sup>Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal State Unitary Enterprise «All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials» State Research Center of the Russian Federation]; e-mail: admin@viam.ru

### Введение

Для достоверной оценки уровней свойств конструкционных материалов требуется накопление и последующий статистический анализ необходимого и достаточного количества экспериментальных данных. Объем представительных выборок для получения статистически обоснованных значений характеристик материала определяется требованиями общей и специальной квалификации материала и исчисляется, как правило, сотнями значений. Кроме того, что оценки уровней значений характеристик конструкционных материалов должны быть получены и/или подтверждены на основе анализа представительных выборок, они должны исключить разрушение серии однотипных конструкций из-за нестабильности или низкого уровня свойств материала, т. е.

существуют такие оптимальные оценки уровней свойств материалов, значения которых, с одной стороны, статистически обоснованы, но при этом получены на минимально допустимом количестве образцов, а с другой – данные оценки гарантируют с заданной вероятностью неразрушение серии однотипных конструкций при их максимальной весовой эффективности.

Численные оценки значений характеристик конструкционных материалов, имеющих существенный разброс экспериментальных данных, будут иметь либо достаточный (по условиям прочности) уровень свойств при неприемлемо низкой вероятности обеспечения безопасной и безотказной работы конструкции, либо, наоборот, слишком низкий уровень свойств – при обеспечении требуемой вероятности. Например, гарантированные уровни значений характеристик прочности металлических конструкционных материалов должны обеспечивать (гарантировать с заданной вероятностью) работоспособность (неразрушение) однотипного парка конструкций по условиям прочности не ниже 90% с доверительным интервалом 95%. При этом гарантированные уровни значений характеристик материала должны быть не ниже уровней значений, заданных (например, техническим заданием) для данной конструкции, ниже которых использование такого конструкционного материала для данной конструкции будет нецелесообразно.

Но представительность выборок экспериментальных значений характеристик конструкционных материалов (полуфабрикатов) определяется не только, и даже не столько, объемом выборок, т. е. суммарным количеством образцов для испытаний или количеством выборочных значений, а в первую очередь корректностью процесса формирования самих выборок. Для металлических материалов важно, в каком объеме представлены плавки и партии полуфабрикатов, отбираемых для изготовления образцов для испытаний, получения экспериментальных данных и формирования выборок.

Например, если из одного полуфабриката (не по типу, а по количеству) будут изготовлены сотни или даже тысячи однотипных образцов и на этих образцах будут проведены испытания и сформированы выборки экспериментальных значений, то такие выборки, вне зависимости от количества испытанных образцов и полученных экспериментальных данных, не будут считаться представительными, а уровни значений – статистически обоснованными для парка однотипных конструкций, поскольку были получены лишь на единственном полуфабрикате и достоверно отражают свойства только этого конкретного полуфабриката.

В этой связи для получения достоверных оценок уровней значений характеристик статической прочности металлических конструкционных материалов в соответствии с требованиями п. 613 АП-23 (25, 27, 29) необходимо формирование выборок по результатам испытаний не менее 100 образцов, изготовленных не менее чем из 10 плавок и 10 партий полуфабриката одного типа, отобранных случайным образом за достаточно длительный период времени [1–3]. При этом длительность отбора полуфабрикатов рекомендательным циркуляром (РЦ) не регламентируется, но косвенно определяется сроком изготовления необходимого количества плавок, стоимостью работ, возможностями металлургического производства и т. д.

Кроме того, уровень и стабильность свойств конструкционных материалов, особенно при продолжительном и/или крупносерийном производстве деталей, должны быть гарантированы на протяжении всего периода изготовления таких деталей вплоть до окончания их производства, а также на всем протяжении эксплуатации воздушного судна [4, 5], т. е. выборки экспериментальных значений, сформированные для оценки,

подтверждения, а в случае необходимости – последующей коррекции полученных ранее уровней свойств конструкционных материалов, должны пополняться на протяжении всего жизненного цикла материала (полуфабриката) [6–8]. Поэтому процесс формирования представительных выборок экспериментальных значений является длительным, как правило, многолетним процессом, не ограничиваемым рамками общей и специальной квалификации [9, 10]. Гарантированные уровни значений характеристик материалов (полуфабрикатов), получаемые в результате общей и специальной квалификации, могут и должны подтверждаться или последовательно корректироваться при постепенном накоплении статистических данных и формировании представительных выборок экспериментальных значений. При накоплении данных и постепенном увеличении объема представительных выборок, в случае отсутствия существенного разброса экспериментальных значений, корректировка полученных ранее гарантированных значений будет происходить преимущественно в сторону их увеличения путем увеличения числа степеней свободы и уменьшения значения соответствующей квантили, уточнения законов распределения, уменьшения или исключения редуцированных коэффициентов.

Под преимущественным увеличением уровня значений той или иной характеристики будем понимать такое изменение уровня свойств, которое приводит к более эффективному, рациональному использованию материала в детали или изделии [11, 12]. Так, в отличие от характеристик прочности, для которых преимущественным увеличением будет, например, повышение предела прочности, для характеристик трещиностойкости или теплофизических характеристик преимущественным увеличением, например, будет считаться численное уменьшение скорости роста трещины усталости или снижение теплопроводности материала, т. е. численное уменьшение гарантированного уровня свойств.

Благодаря последовательному накоплению экспериментальных данных, проведению на их основе статистического анализа и обоснованной корректировке полученных ранее уровней значений характеристик, конструкционная эффективность материала и, как следствие, функциональная и эксплуатационная эффективность деталей и всей конструкции в целом будут повышаться.

В случае если при увеличении объема выборок экспериментальных значений характеристик материала (полуфабриката) по некоторым характеристикам будет наблюдаться снижение уровня свойств (например, это может быть вызвано увеличением разброса экспериментальных значений характеристик вследствие смены поставщика сырья, отклонения от технологии производства и т. д.), то такое снижение будет являться основанием для модернизации материала, рассмотрения вариантов для его замены, а при значительном падении – основанием для снижения уровня эксплуатационной нагруженности деталей или изделий с целью недопущения или сокращения их возможных отказов.

Формирование представительных выборок для определения гарантированных уровней значений характеристик материалов не только весьма длительный, но и отчасти парадоксальный процесс. Парадокс формирования представительных выборок заключается в том, что, с одной стороны, выборки должны формироваться на основе результатов испытаний достаточно большого числа образцов, партий и плавов, изготавливаемых в течение длительного времени, а с другой – целесообразность изготовления материала продолжительное время в больших объемах (10 и более плавов) должна быть гарантированно обоснована востребованным уровнем его свойств,

эффективностью использования, что, в свою очередь, должно быть подтверждено в результате статистического анализа представительных выборок (см. рисунок).



Парадокс формирования представительных выборок и определения гарантированных уровней значений характеристик конструкционных материалов (полуфабрикатов)

Одним из решений задачи по оценке уровней значений характеристик материала в условиях приведенной ранее парадоксальной неопределенности служит постепенное накопление и оценка экспериментальных данных на непредставительных, малых по объему выборках с последующей поэтапной корректировкой ранее полученных значений.

### Материалы и методы

Усеченными или малыми выборками, как правило, считаются выборки объемом до 30 значений [13, 14]. Необходимо отметить, что формализованное разграничение по объему выборок на «малые» и «большие» отсутствует. Но, как отмечалось ранее, достоверность получаемых оценок характеристик материалов зависит не только от объема выборки, но главным образом от корректности формирования и представительности данных [15–17].

Следует различать выборки равного объема, но сформированные на различных по своей представительности исходных данных. Оценка уровней значений характеристики материала для двух малых выборок равного объема (например, 10 значений) должна отличаться, если первая выборка получена по результатам испытаний 10 образцов, изготовленных из одного полуфабриката, а вторая выборка сформирована по результатам испытаний также 10 образцов, но изготовленных из 10 полуфабрикатов (по одному образцу от каждого полуфабриката) [18, 19]. Дифференциация малых выборок равного объема, но различной представительности исходных данных относится также не только к количеству образцов и полуфабрикатов, но и к количеству плавов и партий, из которых они изготовлены.

Рассмотрим метод сравнительной оценки уровней свойств на примере двух условных конструкционных материалов (или полуфабрикатов, термообработок или состояний для одного материала и т. д.)  $M_1$  и  $M_2$  при малых выборках. Рассматриваемый экспресс-метод сравнительной оценки уровней свойств двух и более материалов предлагается впервые.

Пусть каждый из рассматриваемых материалов характеризуется двумя основными равноценными при выборе характеристиками  $X_1$  и  $X_2$ . Далее первый индекс характеристики  $X$  будет соответствовать ее порядковому номеру, а второй индекс –

порядковому номеру материала, для которого она определена. Каждая характеристика для каждого материала представлена соответствующей выборкой экспериментальных значений. Выборка экспериментальных значений первой характеристики  $X_{11}$  первого материала  $M_1$  содержит  $n$  значений, выборка экспериментальных значений второй характеристики  $X_{21}$  материала  $M_1$ , содержит  $m$  значений. Выборки экспериментальных значений тех же характеристик, но для материала  $M_2$  ( $X_{12}$  и  $X_{22}$ ) содержат соответственно  $k$  и  $l$  значений при условии, что  $n, m, k, l \leq 30$ , т. е. имеем:

$$M_1 \begin{cases} X_{11} (x_{111}, x_{112}, \dots, x_{11n}) \\ X_{21} (x_{211}, x_{212}, \dots, x_{21m}) \end{cases};$$

$$M_2 \begin{cases} X_{12} (x_{121}, x_{122}, \dots, x_{12k}) \\ X_{22} (x_{221}, x_{222}, \dots, x_{22l}) \end{cases},$$

где  $x_{11i}, x_{21j}, x_{12s}, x_{22h}$  ( $i=1 \dots n; j=1 \dots m; s=1 \dots k; h=1 \dots l$ ) – экспериментальные выборочные значения характеристик  $X_{11}; X_{21}; X_{12}; X_{22}$ , образующие выборки объемами  $n; m; k$  и  $l$  соответственно.

В общем случае для нескольких материалов  $M_q$  ( $q=1 \dots a$ ), сравниваемых одновременно по нескольким характеристикам  $X_d$  ( $d=1 \dots b$ ) имеем:

$$M_1 \begin{cases} X_{11} (x_{111}, x_{112}, \dots, x_{11n}) \\ X_{21} (x_{211}, x_{212}, \dots, x_{21m}) \\ \dots \\ X_{b1} (x_{b11}, x_{b12}, \dots, x_{b1f}) \end{cases};$$

$$\dots$$

$$M_q \begin{cases} X_{1q} (x_{1q1}, x_{1q2}, \dots, x_{1qe}) \\ X_{2q} (x_{2q1}, x_{2q2}, \dots, x_{2qp}) \\ \dots \\ X_{bq} (x_{bq1}, x_{bq2}, \dots, x_{bqt}) \end{cases};$$

$$\dots$$

$$M_a \begin{cases} X_{1a} (x_{1a1}, x_{1a2}, \dots, x_{1aw}) \\ X_{2a} (x_{2a1}, x_{2a2}, \dots, x_{2ao}) \\ \dots \\ X_{ba} (x_{ba1}, x_{ba2}, \dots, x_{bar}) \end{cases},$$

где  $a$  – общее количество сравниваемых материалов;  $b$  – общее количество сравниваемых характеристик;  $n, m, f, e, p, t, w, o, r$  – объемы выборок ( $\leq 30$ ) соответствующих характеристик.

Соответственно, для каждого рассматриваемого материала могут быть определены основные статистические данные его характеристик – выборочное среднее, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации:

$$M_1 \begin{cases} \bar{X}_{11}, S_n, \gamma_{11} \\ \bar{X}_{21}, S_m, \gamma_{21} \\ \dots \\ \bar{X}_{b1}, S_{ff}, \gamma_{b1} \end{cases};$$

$$\dots$$

$$M_q \begin{cases} \bar{X}_{1q}, S_{ee}, \gamma_{1q} \\ \bar{X}_{2q}, S_{pp}, \gamma_{2q} ; \\ \dots \\ \bar{X}_{bq}, S_{tt}, \gamma_{bq} \\ \dots \end{cases}$$

$$M_a \begin{cases} \bar{X}_{1a}, S_{vv}, \gamma_{1a} \\ \bar{X}_{2a}, S_{oo}, \gamma_{2a} , \\ \dots \\ \bar{X}_{ba}, S_{rr}, \gamma_{ba} \end{cases}$$

где  $\bar{X}$  – средние значения характеристик материалов;  $S$  – среднеквадратические отклонения (стандартные отклонения) характеристик материалов;  $\gamma$  – коэффициенты вариации характеристик материалов,

и оценки характеристик, соответствующие заданному уровню вероятности и объему рассматриваемых выборок:

$$M_q(\tilde{X}_{dq}), \tag{1}$$

где  $q=1\dots a$ ;  $d=1\dots b$ , при этом индекс  $d$  последовательно пробегает от 1 до  $b$  для каждого индекса  $q$ ;  $\tilde{X}$  – вероятностные оценки уровней свойств материалов (для характеристик прочности в качестве вероятностных оценок принимаются значения, соответствующие нижним границам доверительных интервалов, построенным на квантилях уровня вероятности  $P_{\alpha,n}$  и числа степеней свободы  $k=n-1$ ;  $P_{\alpha}$  – вероятность, гарантирующая для рассматриваемых характеристик данного материала (полуфабриката) превышение величины  $\tilde{X}_p$ ).

Получение значений вероятностных оценок  $\tilde{X}_{dq}$  для малых выборок представляет собой отдельную теоретическую задачу, в настоящее время до конца не формализованную [20, 21]. В ряде работ на примере экспериментальных данных различного происхождения рассматриваются методы получения таких оценок в условиях малых выборок [22, 23].

В данной статье будем считать, что вероятностные оценки  $\tilde{X}_{dq}$  предварительно определены с помощью одного из рассматриваемых в научно-технической литературе непараметрических методов (например – бутстрэп (bootstrap) [24–26]) с приемлемой точностью для задачи сравнения уровней свойств материалов, т. е. уже известны.

Если определены оценки характеристик сравниваемых материалов по выражению (1), то при сравнении двух и более материалов может возникнуть дополнительная неопределенность (основная неопределенность связана с усечением и непредставительностью выборок), при которой нельзя однозначно утверждать – какой из рассматриваемых материалов является предпочтительным. Данная неопределенность связана с тем, что при сравнении нескольких материалов по нескольким равнозначным характеристикам ни одному из материалов нельзя отдать предпочтение, поскольку один из материалов оказывается более предпочтительным по одним характеристикам, а другой материал – по другим характеристикам (характеристики при этом считаются равноценными, а количество сравниваемых характеристик одинаково). При этом следует различать два возможных случая осуществления выбора. В первом случае, при котором проводится сравнение двух материалов или попарное сравнение нескольких материалов по

равному количеству равнозначных характеристик (количество сравниваемых характеристик нечетно), преимущественный материал всегда можно определить как материал, обладающий простым большинством характеристик с более высокими оценками уровней свойств.

Во втором случае, когда проводится одновременное сравнение произвольного количества материалов по количеству оценок уровней свойств, кратных количеству рассматриваемых характеристик, возможна ситуация, при которой каждый из материалов обладает равным количеством характеристик с повышенными уровнями значений, но комбинация таких характеристик у разных материалов будет отличаться друг от друга или уровни значений для некоторых характеристик будут равны между собой. В данном случае при выборе преимущественного материала, при прочих равных условиях, следует руководствоваться тем, какие именно характеристики и какая именно комбинация характеристик являются наиболее важными для целевого использования конструкционного материала. Если при выборе преимущественного материала все характеристики, по которым проводится сравнение, не являются равноценными для данного полуфабриката, режимов нагружения, конструкции и т. д., то для реализации рассматриваемого метода предлагается вводить соответствующие весовые коэффициенты характеристик, отражающие значимость для данного исследования той или иной характеристики по сравнению с другими.

Таким образом, в общем случае, согласно выражению (1), для сравниваемых материалов может быть определена матрица размерности  $a \times b$ :

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{X}_{11} & \dots & \tilde{X}_{1b} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{X}_{a1} & \dots & \tilde{X}_{ab} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Строки матрицы  $M$  характеризуют уровни свойств для рассматриваемых характеристик одного материала, в то время как столбцы характеризуют изменения уровня свойств одной характеристики для всех сравниваемых материалов.

Очевидно, что, при прочих равных условиях, один из сравниваемых материалов является более предпочтительным по отношению к другим материалам, если значения вероятностных оценок для всех или большинства уровней основных характеристик данного материала численно превосходят уровни аналогичных свойств других  $(a-1)$ -материалов. Однако задача существенно усложняется, если сравниваемые материалы обладают равным количеством различных оценок основных характеристик с высоким уровнем свойств. Под основными характеристиками в данном случае понимаются характеристики материала, определяющие его преимущественный выбор.

Нормируем матрицу (2) по максимальным значениям характеристик сравниваемых материалов. Для этого в каждом столбце матрицы  $M$  найдем максимальное значение оценки  $\tilde{X}_{\max}$  и разделим на него остальные значения в этом столбце (очевидно, что  $\tilde{X}_{\max} \neq 0$ ). В результате получим матрицу  $M_n$ , в каждом столбце которой случайным образом будут располагаться единицы и константы меньше единицы.

В общем виде:

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_{11} \\ \dots \\ \tilde{X}_{a1} \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{X}_{\max 1}; \quad \begin{pmatrix} \tilde{X}_{12} \\ \dots \\ \tilde{X}_{a2} \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{X}_{\max 2}; \quad \dots; \quad \begin{pmatrix} \tilde{X}_{1b} \\ \dots \\ \tilde{X}_{ab} \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{X}_{\max b}$$

или

$$M_H = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{X}_{11}}{\tilde{X}_{\max 1}} & \dots & \frac{\tilde{X}_{1b}}{\tilde{X}_{\max b}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\tilde{X}_{a1}}{\tilde{X}_{\max 1}} & \dots & \frac{\tilde{X}_{ab}}{\tilde{X}_{\max b}} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \frac{\tilde{X}_{qd}}{\tilde{X}_{\max d}} \leq 1. \quad (3)$$

В качестве примера – нормированная матрица при сравнении трех материалов по трем характеристикам имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,78 & 0,67 \\ 0,94 & 0,82 & 1 \\ 0,85 & 1 & 0,58 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Как видно из выражения (4), материал №1 (верхняя строка) по первой характеристике имеет преимущество перед двумя другими материалами, материал №2 (вторая строка) – по третьей и материал №3 (третья строка) – по второй. Если все три характеристики являются равноценными при выборе материала, то выбрать один из этих трех материалов в качестве преимущественного в данном примере без дополнительных преобразований затруднительно или невозможно, поскольку каждый материал обладает одной из преимущественных характеристик.

Если из сравниваемых материалов требуется выбрать только один материал с наилучшим уровнем характеристик или их комбинаций, то материалы, участвующие в сравнении, для которых строки матрицы (3) после вычислений не содержат элементы, численное значение которых равно 1, могут быть исключены из дальнейшего анализа. Если в результате сравнительного анализа необходимо составить «рейтинг» материалов по уровням их свойств, то при формировании матрицы (3) и в дальнейших вычислениях учитываются все строки (материалы).

Для выбора преимущественного материала в условиях данной неопределенности проведем нормирование матрицы еще раз, разделив нормированные значения характеристик на максимальное для данной характеристики нормированное значение, не равное 1. В результате получим матрицу  $M_{2H}$  или нормирование второго уровня:

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{X}_{11}}{\tilde{X}_{\max 1}} \\ \dots \\ \frac{\tilde{X}_{a1}}{\tilde{X}_{\max 1}} \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{X}_{2\max 1}; \quad \begin{pmatrix} \frac{\tilde{X}_{12}}{\tilde{X}_{\max 2}} \\ \dots \\ \frac{\tilde{X}_{a2}}{\tilde{X}_{\max 2}} \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{X}_{2\max 2}; \quad \dots; \quad \begin{pmatrix} \frac{\tilde{X}_{1b}}{\tilde{X}_{\max b}} \\ \dots \\ \frac{\tilde{X}_{ab}}{\tilde{X}_{\max b}} \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{X}_{2\max b}; \quad 0 < \tilde{X}_{2\max b} < 1$$

или

$$M_{2H} = \begin{pmatrix} \left[ \frac{\tilde{X}_{11}}{\tilde{X}_{\max 1}} \right] / \tilde{X}_{2\max 1} & \dots & \left[ \frac{\tilde{X}_{1b}}{\tilde{X}_{\max b}} \right] / \tilde{X}_{2\max b} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left[ \frac{\tilde{X}_{a1}}{\tilde{X}_{\max 1}} \right] / \tilde{X}_{2\max 1} & \dots & \left[ \frac{\tilde{X}_{ab}}{\tilde{X}_{\max b}} \right] / \tilde{X}_{2\max b} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для рассматриваемого примера (сравнение трех материалов по трем характеристикам) в результате повторного нормирования имеем:

$$\begin{pmatrix} 1,06 & 0,95 & 1 \\ 1 & 1 & 1,49 \\ 0,90 & 1,22 & 0,86 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что второй материал (строка №2) имеет преимущество по рассматриваемым характеристикам по сравнению с двумя другими материалами.

Данный способ выбора материала применим, если сравниваются два и более материала по трем и более характеристикам. В случае если между собой сравниваются два материала по двум характеристикам, то следует использовать сравнение сумм нормированных оценок материалов. Материал, у которого сумма нормированных оценок первого или второго уровня максимальна, будет считаться предпочтительным относительно другого материала при прочих равных условиях. Из выражения (3) имеем:

$$\begin{pmatrix} \sum_{d=1}^b \frac{\tilde{X}_{1d}}{\tilde{X}_{\max d}} \\ \dots \\ \sum_{d=1}^b \frac{\tilde{X}_{ad}}{\tilde{X}_{\max d}} \end{pmatrix} = (M_q)_\Sigma,$$

где элементы столбца матрицы  $(M_q)_\Sigma$  ( $q=1\dots a$ ) – суммы нормированных значений оценок по всем характеристикам, по каждому сравниваемому материалу.

В данном случае материал считается предпочтительным, если сумма нормированных значений оценок его характеристик максимальна. Сравнение по суммам нормированных оценок также можно использовать и для дополнительной проверки корректности выбора одного из двух и более материалов, по трем и более характеристикам.

Определим суммы  $(M_q)_\Sigma$  ( $q=1, 2, 3$ ) нормированных значений оценок материалов для рассматриваемого примера выражения (4):

$$\begin{pmatrix} 1,45 \\ \mathbf{1,76} \\ 1,43 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из нормированной матрицы (7), также как и из матрицы (6), следует, что второй материал (строка №2) обладает максимальной суммой нормированных значений оценок характеристик рассматриваемых материалов, т. е. имеет преимущество по данным характеристикам по сравнению с двумя другими материалами, участвующими в сравнении. Как можно заметить, для матрицы (6) при суммировании нормированных значений оценок характеристик рассматриваемых материалов второго уровня данное утверждение также справедливо.

### Результаты

Рассмотрим предлагаемый подход на еще одном практическом примере сравнения трех условных материалов (полуфабрикатов) при малых выборках по четырем основным механическим характеристикам – например: предел прочности при растяжении

$\sigma_b$ , условный предел текучести  $\sigma_{0,2}$ , предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$  и модуль упругости  $E$  [11–13]. В табл. 1 приведены малые выборки условных экспериментальных значений характеристик однотипных полуфабрикатов трех сравниваемых материалов  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ .

Таблица 1

Условные экспериментальные значения характеристик образцов из типового полуфабриката трех материалов

Условный номер образца	Материал	$\sigma_{пц}$	$\sigma_{0,2}$	$\sigma_b$	$E$ , ГПа
		МПа			
1	$M_1$	430	455	510	72
2		440	450	505	72
3		435	450	520	71
4		430	445	515	72
5		425	455	510	71
6	$M_2$	360	500	530	69
7		365	510	525	70
8		375	490	520	71
9		365	495	515	69
10		370	500	520	72
11	$M_3$	400	485	530	72
12		420	495	530	71
13		410	490	525	72
14		400	490	510	71
15		390	500	515	72

Будем считать, что для данного примера все четыре характеристики при выборе преимущественного материала равнозначны. Объем выборок экспериментальных значений в рассматриваемом примере ( $n=5$ ) крайне мал для получения достоверных оценок сравниваемых характеристик. Тем не менее по данным выборкам определим для всех характеристик их вероятностные оценки, опустив проверки о принадлежности данных выборок одному из известных законов распределения, считая, что данные выборки принадлежат одной генеральной совокупности, имеющей нормальный закон распределения. Для проверки соотношений между полученными уровнями оценок сравниваемых характеристик по малым выборкам, дополнительно определим оценки характеристик на основе выборок, искусственно сгенерированных бутстрэп-методом (100 значений/100 повторений). Основные статистические данные выборок экспериментальных значений, а именно средние значения, среднеквадратические отклонения (СКО) и коэффициенты вариации ( $\gamma$ ) по каждой из четырех характеристик для трех сравниваемых материалов (полуфабрикатов), приведены в табл. 2.

Как видно из данных табл. 2, для экспериментальных значений рассматриваемого примера ( $n=5$ ) и для данных, полученных бутстрэп-методом ( $n=100$ ), соотношения между оценками уровней характеристик сравниваемых материалов сохраняются. В обоих случаях присутствует неопределенность задачи второго типа. Материала  $M_1$  превосходит другие материалы по значениям  $\sigma_{пц}$  и имеет равные значения оценок для модуля упругости с материалом  $M_3$ . Материал  $M_3$  в свою очередь имеет равные максимальные значения оценок для  $\sigma_{0,2}$ ,  $E$  с материалами  $M_2$  и  $M_1$  соответственно. Материал  $M_2$  при этом имеет максимальное значение оценки для  $\sigma_b$  для данных материалов, т. е. существует неоднозначность преимущественного выбора одного из трех рассматриваемых материалов, поскольку каждый из трех материалов обладает характеристикой,

оценка уровня значений которой (напомним, что все характеристики в данном примере являются равноценными при выборе материала) принимает по отношению к двум другим материалам максимальные (или равные – как для  $\sigma_{0,2}$  и  $E$ ) значения.

Таблица 2

**Основные статистические данные выборок экспериментальных значений механических характеристик однотипных полуфабрикатов трех металлических материалов**

Условный номер образца	Материал	Характеристика материала	Объем выборки $n$	Среднее значение	СКО	Коэффициент вариации	Оценка уровня $P_{90/95}$
				$\bar{X}$	$S$	$\gamma$	$\tilde{X}_p(\bar{X})$
1	$M_1$	$\sigma_{пл}$ , МПа	5	432	5,70	1,32	408
2			100*	432	7,05	1,63	422
4		$\sigma_{0,2}$ , МПа	5	451	4,18	0,93	434
5			100*	452	5,81	1,29	443
7		$\sigma_B$ , МПа	5	512	5,70	1,11	488
8			100*	511	7,43	1,45	499
10		$E$ , ГПа	5	72	0,55	0,76	69
11			100*	72	0,71	0,99	71
13	$M_2$	$\sigma_{пл}$ , МПа	5	367	5,70	1,55	343
14			100*	367	7,73	2,11	355
16		$\sigma_{0,2}$ , МПа	5	499	7,42	1,49	468
17			100*	501	10,3	2,06	485
19		$\sigma_B$ , МПа	5	522	5,70	1,09	498
20			100*	522	8,29	1,59	509
22		$E$ , ГПа	5	70	1,30	1,86	65
23			100*	70	1,74	2,48	68
25	$M_3$	$\sigma_{пл}$ , МПа	5	404	11,4	2,82	357
26			100*	404	15,1	3,73	381
28		$\sigma_{0,2}$ , МПа	5	492	5,70	1,16	468
29			100*	492	8,58	1,74	479
31		$\sigma_B$ , МПа	5	522	9,08	1,74	484
32			100*	524	12,5	2,38	505
34		$E$ , ГПа	5	72	0,55	0,76	69
35			100*	72	0,73	1,01	71

\* Выборки сгенерированы из исходной выборки бутстрэп-методом (100 значений/100 повторений).

Необходимо отметить, что проводить сравнение материалов предлагаемым способом только по средним значениям уровней свойств некорректно. При существенном разбросе экспериментальных данных или различном объеме выборок отдельных характеристик преимущественный выбор одного материала по средним значениям может не совпадать, а в большинстве случаев будет отличаться от выбора другого материала по уровню гарантированных оценок.

В соответствии с выражением (2) получим две матрицы:

$$M_{n=5} = \begin{pmatrix} \mathbf{408} & 434 & 488 & \mathbf{69} \\ 343 & \mathbf{468} & \mathbf{498} & 65 \\ 357 & \mathbf{468} & 484 & \mathbf{69} \end{pmatrix};$$

$$M_{n=100} = \begin{pmatrix} 422 & 443 & 499 & 71 \\ 355 & 485 & 509 & 68 \\ 381 & 479 & 505 & 71 \end{pmatrix}.$$

Согласно выражению (3), имеем:

$$M_{n=5} = \begin{pmatrix} 1 & 0,93 & 0,98 & 1 \\ 0,84 & 1 & 1 & 0,94 \\ 0,88 & 1 & 0,97 & 1 \end{pmatrix};$$

$$M_{n=100} = \begin{pmatrix} 1 & 0,91 & 0,98 & 1 \\ 0,84 & 1 & 1 & 0,95 \\ 0,90 & 0,99 & 0,99 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемого примера матрица  $M_{n=5}$  содержит равное количество единиц в каждой строке. Для матрицы  $M_{n=100}$  (как и для матрицы  $M_{n=5}$ ) по две единицы в первой и во второй строках и одна единица в третьей строке. Это означает, что, принимая во внимание, что все характеристики равнозначны между собой при выборе материала, нельзя отдать предпочтение ни одному из трех сравниваемых материалов без дополнительных вычислений или введения весовых коэффициентов характеристик.

Согласно предлагаемому методу, в качестве дополнительных вычислений просуммируем строки полученных значений оценок характеристик материалов по каждому материалу. В результате получим:

$$M_{\Sigma n=5} = \begin{pmatrix} 3,91 \\ 3,78 \\ 3,85 \end{pmatrix}; \quad M_{\Sigma n=100} = \begin{pmatrix} 3,89 \\ 3,79 \\ 3,88 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Сравнивая между собой построчно значения сумм для выражений (8) оценок характеристик материалов  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ , полученные с учетом рассеяния экспериментальных данных и на основе значений вероятностных оценок характеристик, видно, что и для исходной выборки ( $M_{\Sigma n=5}$ ), и для сгенерированной бутстрэп-методом ( $M_{\Sigma n=100}$ ) – материал  $M_1$  (по сравнению с материалами  $M_2$  и  $M_3$ ) обладает большими значениями оценок уровней характеристик материалов. Таким образом, в рассматриваемом примере (на основе оценок экспериментальных данных) материал  $M_1$  может считаться более предпочтительным по сравнению с материалами  $M_2$  и  $M_3$ .

В случае если все рассматриваемые характеристики равнозначны по своей значимости и статистической обоснованности для выбора одного из материалов, то в случае нечетного количества сравниваемых характеристик преимущественным будет считаться материал, который обладает простым большинством характеристик с наибольшим гарантированным уровнем свойств. В случае равенства двух материалов по всем оценкам рассматриваемых характеристик, материалы являются полными аналогами, при этом под термином «равенство» понимается в данном случае не только совпадение полученных с заданной точностью оценок, но и попадание полученных значений в заданный интервал.

### Обсуждение и заключения

В условиях малых выборок существующая на первый взгляд однозначность выбора одного из сравниваемых материалов по оценкам характеристик остается условной и требует

дальнейшего статистического обоснования, поскольку при последующем накоплении экспериментальных данных уровни значений характеристик могут корректироваться вплоть до изменения принятого ранее решения по выбору того или другого материала.

Статистическое обоснование и коррекция полученных ранее уровней свойств могут быть вызваны изменением или совершенствованием технологии производства, сменой поставщика, проведением дополнительных испытаний и т. д.

Метод сравнительной оценки уровней свойств двух и более материалов может использоваться для получения предварительной оценки характеристик материалов по экспериментальным данным. При этом с помощью данного метода могут сравниваться значения оценок уровней свойств характеристик, полученные как на малых, так и на больших выборках, вне зависимости от объема экспериментальных данных. Основным условием корректного сравнения характеристик материалов является равное количество экспериментальных данных по каждой характеристике каждого материала.

Предлагаемый метод сравнительной оценки сводится к решению задач по исключению неопределенностей двух типов. Для задач первого типа решение состоит в исключении неопределенности, вызванной непредставительностью малых выборок, и вероятностном обосновании уровней значений характеристик (т. е. необходимо только исключение неопределенности при определении уровней значений, связанной с отсутствием достаточного объема выборки и т. д.). Решением задач первого типа является постепенное увеличение объема и представительности выборок экспериментальных данных, асимптотически приближающих их к генеральной совокупности, распределенной по одному из известных законов распределения.

Как отмечалось ранее, для получения оценок и гарантированных значений характеристик материалов для решения задач первого типа широко используются существующие непараметрические методы для малых выборок.

Для задач второго типа неопределенность выбора материала (полуфабриката) может сохраняться и при увеличении объема и представительности выборок экспериментальных данных, поскольку кроме исключения неопределенности, связанной с непредставительностью малых выборок, необходимо исключить и неопределенность, связанную с неоднозначностью уровней свойств отдельных характеристик сравниваемых материалов. В данной статье рассмотрен метод решения задачи второго типа, в результате которого выбирается материал с наилучшими (наибольшими) уровнями основных свойств. При этом, чем больше характеристик, а соответственно, и их нормализованных оценок используется в выборе материала, тем объективнее будет его выбор. Одновременное использование для анализа нескольких основных характеристик материала или их нормализованных оценок позволяет рассматривать и оценивать материал комплексно, а следовательно, и более обоснованно делать выбор между сравниваемыми материалами-аналогами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нормы летной годности самолетов транспортной категории: АП-23: утв. Постановлением 34-й сессии Совета по авиации и использованию воздушного пространства 06.12.2013. 4-е изд. с поправками 1–5. М.: Авиаиздат, 2014. 195 с.
2. Применение конструкционных металлических материалов и определение из расчетных характеристик: РЦ-АП23(25, 27, 29)-613 / Межгосударственный авиационный комитет. М.: Авиаиздат, 2002. 24 с.
3. Расчетные значения характеристик авиационных металлических конструкционных материалов: справочник. М.: ОАК, 2012. Вып. 4. 302 с.
4. Каблов Е.Н. Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года // Авиационные материалы и технологии. 2012. №S. С. 7–17.
5. Каблов Е.Н., Гриневич А.В., Ерасов В.С. Характеристики прочности металлических авиационных материалов и их расчетные значения // 75 лет. Авиационные материалы. Избранные труды «ВИАМ» 1932–2007. М.: ВИАМ, 2007. С. 370–379.

6. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // *Авиационные материалы и технологии*. 2015. №1 (34). С. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33.
7. Каблов Е.Н. Маркетинг материаловедения, авиастроения и промышленности: настоящее и будущее // *Директор по маркетингу и сбыту*. 2017. №5–6. С. 40–44.
8. Каблов Е.Н. Материалы нового поколения – основа инноваций, технологического лидерства и национальной безопасности России // *Интеллект и технологии*. 2016. №2 (14). С. 16–21.
9. Ерасов В.С., Яковлев Н.О., Нужный Г.А. Квалификационные испытания и исследования прочности авиационных материалов // *Авиационные материалы и технологии*. 2012. №S. С. 440–448.
10. Коновалов В.В., Дубинский С.В., Макаров А.Д., Доценко А.М. Исследование корреляционных зависимостей между механическими свойствами авиационных материалов // *Авиационные материалы и технологии*. 2018. №2 (51). С. 40–46. DOI: 10.18577/2071-9140-2018-0-2-40-46.
11. Подживотов Н.Ю., Каблов Е.Н., Антипов В.В., Ерасов В.С., Серебренникова Н.Ю., Абдуллин М.Р., Лимонин М.В. Слоистые металлополимерные материалы в элементах конструкции воздушных судов // *Перспективные материалы*. 2016. №10. С. 5–19.
12. Кириллов В.Н., Ефимов В.А., Шведкова А.К., Николаев Е.В. Исследование влияния климатических факторов и механического нагружения на структуру и механические свойства ПКМ // *Авиационные материалы и технологии*. 2011. №4. С. 41–45.
13. Гаскаров Д.В., Шаповалов В.И. Малая выборка. М.: Статистика, 1978. 248 с.
14. Горбунова Е.Б. Метод непараметрической оценки закона распределения случайного параметра по малому числу наблюдений // *Инженерный вестник Дона*. 2014. №3. URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2014/2516> (дата обращения: 24.09.2019).
15. Гриневиц А.В., Луценко А.Н., Каримова С.А. Расчетные характеристики металлических материалов с учетом влажности // *Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн*. 2014. №7. Ст. 10. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 23.09.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2014-0-7-10-10.
16. Луценко А.Н., Славин А.В., Ерасов В.С., Хвацкий К.К. Прочностные испытания и исследования авиационных материалов // *Авиационные материалы и технологии*. 2017. №S. С. 527–546. DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-S-527-546.
17. Ерасов В.С., Подживотов Н.Ю. Методы оценки расчетных значений характеристик прочности авиационных материалов в России и за рубежом // *Комментарии к стандартам, ТУ, сертификатам: приложение к журналу «Все материалы. Энциклопедический справочник»*. 2013. №12. С. 2–8.
18. Подживотов Н.Ю., Ерасов В.С., Орешко Е.И. О методах оценки статической прочности материалов, полученных с помощью аддитивных технологических процессов // *Комментарии к стандартам, ТУ, сертификатам: приложение к журналу «Все материалы. Энциклопедический справочник»*. 2017. №10. С. 54–60.
19. Ерасов В.С., Яковлев Н.О., Автаев В.В. Современное состояние лаборатории имени профессора С.И. Кишкиной // *Авиационные материалы и технологии*. 2014. №S4. С. 136–139. DOI: 10.18577/2071-9140-2014-0-S4-136-139.
20. Бобырь М.В., Титов Д.В., Кулабухов С.А. Оценка прогнозирования принятия решений в условиях неопределенности // *Телекоммуникации*. 2015. №11. С. 39–44.
21. Золоторев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. М.: Наука, 1986. 416 с.
22. Крянев А.В., Лукин Г.В. Математические методы обработки неопределенных данных. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
23. Лапко А.В., Шарков Н.А. Непараметрические методы обнаружения закономерностей в условиях малых выборок // *Приборостроение*, 2008. Т. 51. №8. С. 62–67.
24. Глухов В.В., Ануфриев Д.В. Бутстрэп-процедуры определения точностных характеристик // *Научный вестник МГТУ ГА*. 2005. №89 (7). С. 30–35.
25. Самойленко А.П., Горбунова Е.Б. Метод восстановления плотности вероятностей прогнозируемой случайной величины по укороченной выборке данных // *Нелинейный мир*. 2015. №6. С. 10–17.
26. Шитиков В.К., Розенберг Г.С. Рандомизация и бутстрэп: статистический анализ в биологии и экологии с использованием R. Тольятти: Кассандра, 2013. 314 с.