

УДК 620.1:678.8

Д.В. Гриневич<sup>1</sup>, Н.О. Яковлев<sup>1</sup>, А.В. Славин<sup>1</sup>

## КРИТЕРИИ РАЗРУШЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ (обзор)

DOI: 10.18577/2307-6046-2019-0-7-92-111

*Приведен обзор основных критериев разрушения полимерных композиционных материалов, применяемых в современных программных комплексах при расчете на прочность композитных пластин и оболочек. Данные критерии используют и для анализа разрушения ряда других анизотропных материалов. Рассматриваются критерии по предельным значениям – по напряжениям и деформациям, полиномиальные критерии Цзя–Ву, Цзя–Хилла, Ямады–Суна, Хоффмана, Коуина, Ханкинсона, Норриса, а также критерии по видам разрушения – Пака (в различных модификациях), Хашина, Кристенсена, LaRC, Кунце и другие. Приведены основные соотношения критериев, описаны применяемые подходы при расчете прочности слоистых композиционных материалов.*

**Ключевые слова:** композиционные материалы, монослой, армирование, стеклопластики, углепластики, метод конечных элементов, моделирование, критерии разрушения.

D.V. Grinevich<sup>1</sup>, N.O. Yakovlev<sup>1</sup>, A.V. Slavin<sup>1</sup>

## THE CRITERIA OF THE FAILURE OF POLYMER MATRIX COMPOSITES (review)

*The paper deals of the main failure criteria of polymer matrix composites, used in modern simulation's software systems by calculating the strength of composite plates and shells. The limit criteria (for stress and strain) are noted, and the polynomial failure criteria: Tsai-Wu, Tsai-Hill, Yamada-Sun, Hoffman, Cowin, Hankinson, Norris, and separated modes failure criteria: Puck (in various modifications), Hashin, Christensen, LaRC, Cuntze and others. Much attention is given to the theoretical background of the criteria and the applied approaches for the calculation of the strength of composite materials.*

**Keywords:** composite materials, lamina, reinforcement, glass-reinforced plastic, carbon-reinforced plastic, finite element method, simulation, failure criteria.

---

<sup>1</sup>Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal State Unitary Enterprise «All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials» State Research Center of the Russian Federation]; e-mail: admin@viam.ru

### Введение

Для анализа прочности конструкций широко применяют различные расчетные программные комплексы. В данных комплексах используется метод конечных элементов (МКЭ), который позволяет построить математическую модель с некой идеализацией, соответствующей реальной конструкции, и по приложенным к ней нагрузкам и граничным условиям получить распределение полей напряжений и деформаций. С учетом полученных результатов делают выводы о выполнении условия прочности. Наиболее простой расчетный случай – однородный материал. Однако в настоящее время большое количество деталей создают из полимерных композиционных материалов (ПКМ), которые состоят из разнородных компонентов, обладающих индивидуальными свойствами и особенностями – матрица служит связующей основой, а армирующие наполнители обладают высокой прочностью [1–8].

Для моделирования конструкций из ПКМ применяют несколько основных способов: структурный, феноменологический и комбинированный [9]. При *структурном* подходе рассматривается структура материала и микромеханическое взаимодействие между отдельными элементами компонентов при нагружении всей конструкции [10, 11]. Такой подход является труднореализуемым, по крайней мере при рассмотрении микромеханических свойств больших конструкций. При *феноменологическом* методе неоднородный ПКМ рассматривается как усредненный сплошной материал – однородный анизотропный [12]. Промежуточный вариант – комбинация этих двух методов, т. е. *структурно-феноменологический* метод, в котором идеализировано описывается поведение монослоя. Многослойный ПКМ в этом случае описывается составным – включающим отдельные разноориентированные слои, т. е. получают макроскопическую оценку свойств гетерогенных систем через физико-механические свойства составляющих данные системы фаз. Такой подход использовался, например, в работе [13]. На рис. 1 приведен один из примеров многослойного ПКМ, состоящего из  $n$  однонаправленных слоев (рис. 1, б) [14]. На рис. 1, в приведен трехмерный элементарный объем из монослоя с компонентами тензора напряжений, действующих в нем. Символом  $\parallel$  обозначены оси, компоненты тензоров и подобные векторные величины, совпадающие с направлением волокон, символом  $\perp$  – перпендикулярные. Совместное использование данных символов указывает на сдвиговые компоненты. На рис. 1, г приводится двухмерный элементарный объем монослоя для плосконапряженного состояния пластин и оболочек. (В данном обзоре будут рассматриваться варианты критериев разрушения при плосконапряженном состоянии.)

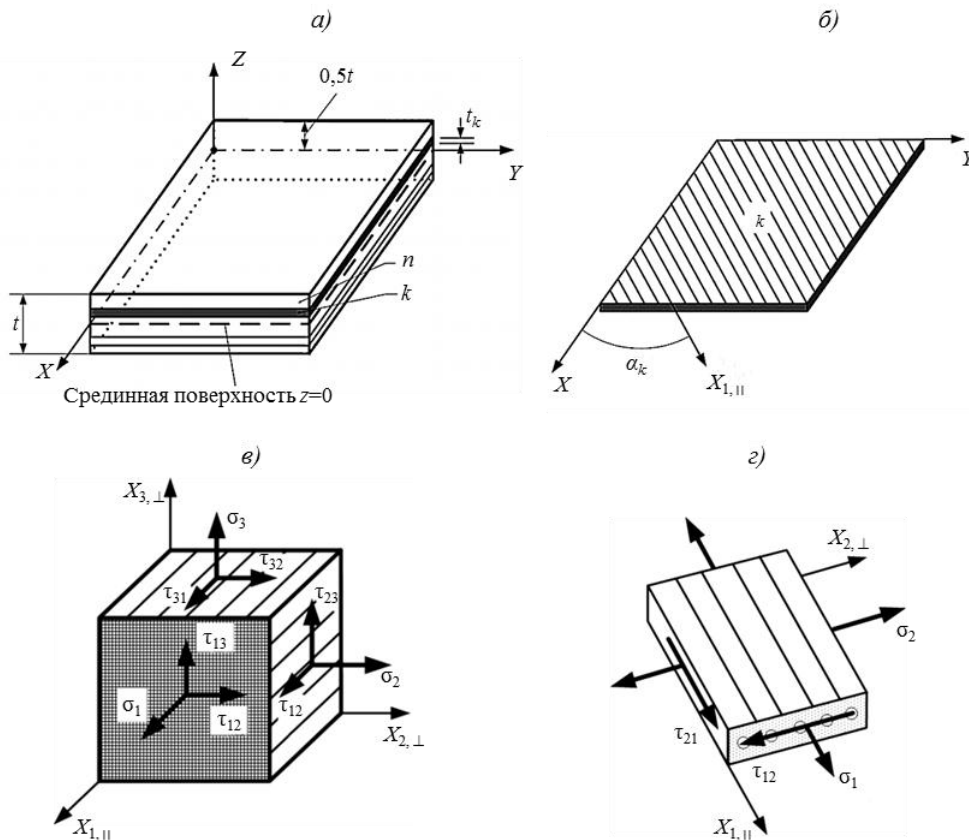


Рис. 1. Схема полимерного композиционного материала (ПКМ):  
 а – многослойный пакет; б – отдельный слой; в – трехмерный элементарный объем;  
 г – плоский элементарный объем ПКМ

При анализе прочности многослойных оболочек, согласно структурно-феноменологическому методу, сначала получают усредненные физико-механические характеристики, после чего происходит расчет конструкции, состоящей из оболочек; затем с помощью математической модели определяют распределение напряжений и деформаций в конструкции. После чего через дробные соотношения переходят от усредненных деформаций и напряжений в композитных оболочках к напряжениям и деформациям в каждом монослое ПКМ – на основе его свойств, ориентации волокон, толщины и положения в пакете. На завершающем этапе на основании полученных значений с помощью выбранного критерия разрушения делается заключение о прочности монослоя.

В настоящее время существует большое количество критериев разрушения анизотропных тел, которые используются в программных продуктах конечно-элементного анализа. Все они основываются на связи значений тензора напряжений и/или деформаций и в них рассматривается разрушение отдельного слоя, связанное с началом разрушения всей конструкции.

Основные программные комплексы и применяемые в них критерии приведены в табл. 1. Для подготовки усредненных моделей композиционных оболочек и вычисления прочности по слоям, как правило, используют отдельные модули в составе расчетного комплекса. Приведены также критерии, которые указали разработчики комплексов; их список может варьироваться в зависимости от развития программных комплексов, изменения состава модулей, их наполняемости, а также лицензионной политики фирм-разработчиков. Кроме того, разработчиками может быть модифицирован или изменен любой критерий с сохранением исходного, исторически сложившегося названия, что приводит к необходимости при применении расчетных программных комплексов удостовериться в точности формулировок в сопроводительной справочной документации.

Таблица 1

**Основные критерии разрушения полимерных композиционных материалов, разработанные разными фирмами**

Программное обеспечение / Наименование критерия	Ansys	Abaqus (Dassault Systemes SE)	MSC. Nastran (MSC. Software)	NX Nastran (Siemens)	Nastran In-CAD (Autodesk)	Helius (Autodesk)	Comsol	Hyper-Works (Altair)
Максимальные напряжения	+	+	+	+	+	+	+	+
Максимальные деформации	+	+	+	+	+	+	+	+
Цай–Бу (Tsai–Wu)	+	+	+	+	+	+	+	+
Цай–Хилла (Tsai–Hill)	+	+	+	+	+	+	+	+
Аззи–Цай–Хилла (Azzi–Tsai–Hill)	–	+	–	–	–	–	+	–
Хоффмана (Hoffman)	+	+	+	+	+	–	+	+
Хашина (Hashin)	+	–	–	–	–	+	–	+
Пака (Puck)	+	–	–	+	+	+	–	+
LaRC	+	–	–	+	+	+	–	–
Особые	Кунце (Cuntze)	Ханкинсона (Hankinson), Коуина (Cowin)		–	–	Кристенсена (Christensen)	Норриса (Norris)	Ямады–Суна (Yamada–Sun)

Следует отметить, что кроме программных МКЭ-пакетов, в которых осуществляется построение модели композитной конструкции и анализ ее прочности по имеющимся критериям, также существуют отдельные программные продукты, в которых

отсутствует возможность построения моделей, но они служат для различного специализированного анализа конечно-элементных моделей для других программных комплексов. В таких специализированных программах количество предлагаемых для анализа критериев может достигать нескольких десятков, что позволяет пользователю выбрать наиболее подходящий вариант.

Кроме того, основные программные МКЭ-комплексы позволяют пользователям запрограммировать произвольный критерий на языке высокого уровня. Разработчики программных комплексов, не беря на себя ответственность за возможное несоответствие критериев для конкретного материала, выбор подходящего критерия для расчета оставляют за пользователем, в качестве возможного варианта действий предлагая перебор всех основных критериев с окончательным принятием самого консервативного результата.

### Основные критерии разрушения ПКМ

Критерии разрушения ПКМ можно разделить на следующие группы: по предельным значениям, по объединенным значениям и по виду разрушения. Рассмотрим основные из них, применяемые в распространенных программных МКЭ-комплексах.

#### Критерии по предельным значениям

Наиболее простыми из используемых в настоящее время будут критерии по максимальным предельным значениям напряжений или деформации, возникающих в анализируемом слое ПКМ.

*Критерий максимальных напряжений* описывает наступление разрушения при превышении одного из значений тензора напряжений соответствующего предела прочности. Аналитически его можно представить в виде:

$$\left( \left| \frac{\sigma_1}{X} \right|, \left| \frac{\sigma_2}{Y} \right|, \left| \frac{\sigma_3}{Z} \right|, \left| \frac{\tau_{12}}{S} \right|, \left| \frac{\tau_{13}}{R} \right|, \left| \frac{\tau_{23}}{Q} \right| \right)_{\max} \leq 1, \quad (1)$$

причем

$$\begin{aligned} \sigma_1 \geq 0 &\Rightarrow X = X_t; & \sigma_1 < 0 &\Rightarrow X = X_c; \\ \sigma_2 \geq 0 &\Rightarrow Y = Y_t; & \sigma_2 < 0 &\Rightarrow Y = Y_c; \\ \sigma_3 \geq 0 &\Rightarrow Z = Z_t; & \sigma_3 < 0 &\Rightarrow Z = Z_c, \end{aligned}$$

где  $X_{t/c}$  – предел прочности при растяжении/сжатии по оси  $x$  (аналогично обозначены пределы прочности для других осей);  $Q, R, S$  – предельные сдвиговые напряжения в плоскостях с нормальными в направлениях 1, 2, 3 соответственно (рис. 1, в).

Для плосконапряженного состояния будут рассматриваться только компоненты  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ .

*Критерий максимальных деформаций* описывает наступление разрушения, когда наибольшая компонента тензора деформаций превышает предельное значение:

$$\left( \left| \frac{\varepsilon_1}{X_\varepsilon} \right|, \left| \frac{\varepsilon_2}{Y_\varepsilon} \right|, \left| \frac{\varepsilon_3}{Z_\varepsilon} \right|, \left| \frac{\gamma_{12}}{S_\varepsilon} \right|, \left| \frac{\gamma_{13}}{R_\varepsilon} \right|, \left| \frac{\gamma_{23}}{Q_\varepsilon} \right| \right)_{\max} \leq 1, \quad (2)$$

где соотносят предельные значения к нормальным ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ) и сдвиговым ( $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ ) деформациям.

Для нормальных деформаций различают случаи растяжения и сжатия, предельные значения для которых можно получить из пределов прочности, отнесенных к модулю упругости материала ( $E_t, E_c$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \geq 0 &\Rightarrow X_\varepsilon = X_{\varepsilon t} = X_t / E_t; & \varepsilon_1 < 0 &\Rightarrow X_\varepsilon = X_{\varepsilon c} = X_c / E_c; \\ \varepsilon_2 \geq 0 &\Rightarrow Y_\varepsilon = Y_{\varepsilon t} = Y_t / E_t; & \varepsilon_2 < 0 &\Rightarrow Y_\varepsilon = Y_{\varepsilon c} = Y_c / E_c; \\ \varepsilon_3 \geq 0 &\Rightarrow Z_\varepsilon = Z_{\varepsilon t} = Z_t / E_t; & \varepsilon_3 < 0 &\Rightarrow Z_\varepsilon = Z_{\varepsilon c} = Z_c / E_c. \end{aligned}$$

Для двухмерной оболочки будут рассматриваться только компоненты  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ .

Следует также отметить, что спектр критериев по предельным значениям достаточно широк, и кроме указанных ранее, которые повсеместно используются в расчетном программном обеспечении, существуют другие критерии:

– *Критерий Stowell–Liu*, в котором предельные значения напряжений берутся в продольном направлении – для волокон  $X_f$ ; в поперечном – для матрицы: предел прочности  $Y_m$ , предельные сдвиговые напряжения  $S_m$  [15]; для плосконапряженного состояния:

$$\left( \left| \frac{\sigma_1}{X_f} \right|, \left| \frac{\sigma_2}{Y_m} \right|, \left| \frac{\tau_{12}}{S_m} \right| \right)_{\max} \leq 1;$$

– *Критерий Kelly–Davies*, в котором предельные значения напряжений также берутся в продольном направлении – для волокон; в поперечном – предел прочности для матрицы, но для поперечного и сдвигового соотношения используются понижающие коэффициенты [16]:

$$\left( \left| \frac{\sigma_1}{X_f} \right|, \left| \frac{\sigma_2}{1,15Y_m} \right|, \left| \frac{\tau_{12}}{1,5S_m} \right| \right)_{\max} \leq 1.$$

Существуют варианты критериев по предельным значениям, где рассматривается функциональная зависимость от пределов прочности при растяжении и сдвиге матрицы. Преимущества критериев по предельным значениям – простота анализа прочности конструкции, практически полное отсутствие математических вычислений, прозрачный характер оценки прочности и коэффициента запаса. Недостаток – неудовлетворительная точность при сложном нагружении. Это привело к совершенствованию критериев разрушения композиционных материалов.

### Критерии по объединенным значениям

Для указанных ранее критериев все виды разрушения взаимно независимы, разрушение наступает при простом достижении критического значения одной компоненты. Другой тип критериев разрушения – объединение компонент тензора напряжения или деформации в одно выражение  $f(\sigma_{ij})$  или  $f(\varepsilon_{ij})$ .

Широко применяют полиномиальное описание такой связи компонент, предложенное в теории прочности анизотропных тел К.В. Захаровым [17], А.К. Малмейстером [18] и аналогичной теории И.И. Гольденבלата и В.А. Копнова [19, 20]. Общий вид полиномиального критерия по теории Захарова–Малмейстера для второго порядка будет выглядеть следующим образом:

$$f(\sigma_{ij}) = \Pi_{ij}\sigma_{ij} + \Pi_{ijmn}\sigma_{ij}\sigma_{mn} \leq 1, \quad (3)$$

где  $\Pi_{ij}, \Pi_{ijmn}$  – компоненты тензоров прочности соответственно второго и четвертого рангов;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений [21].

В полиномиальном виде может быть записан критерий по максимальным предельным значениям напряжений [22]:

$$\begin{aligned} &(\sigma_1 - X_t)(\sigma_1 + X_c) (\sigma_2 - Y_t)(\sigma_2 + Y_c) (\sigma_3 - Z_t)(\sigma_3 + Z_c) \cdot \\ &\cdot (\tau_{12} - S_t)(\tau_{12} + S) (\tau_{13} - R)(\tau_{13} + R) (\tau_{23} - Q)(\tau_{23} + Q) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В полиномиальном виде также можно записать критерий по максимальным предельным значениям деформации:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_1 - X_\varepsilon)(\varepsilon_1 + X_\varepsilon) (\varepsilon_2 - Y_\varepsilon)(\varepsilon_2 + Y_\varepsilon) (\varepsilon_3 - Z_\varepsilon)(\varepsilon_3 + Z_\varepsilon) \cdot \\ &\cdot (\gamma_{12} - S_\varepsilon)(\gamma_{12} + S_\varepsilon) (\gamma_{13} - R_\varepsilon)(\gamma_{13} + R_\varepsilon) (\gamma_{23} - Q_\varepsilon)(\gamma_{23} + Q_\varepsilon) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В общем виде квадратичный критерий разрушения имеет вид [23, 24]:

$$f = F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{13}^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3. \quad (6)$$

Это уравнение описывает в пространстве напряжений предельную поверхность, выход за которую и будет означать разрушение слоя композита. Примеры предельных кривых (проекции предельных поверхностей на плоскость напряжений) изображены на рис. 2. В пространстве напряжений поверхность квадратичного критерия будет представлять собой эллипсоид, сдвинутый от центра и наклоненный относительно осей.

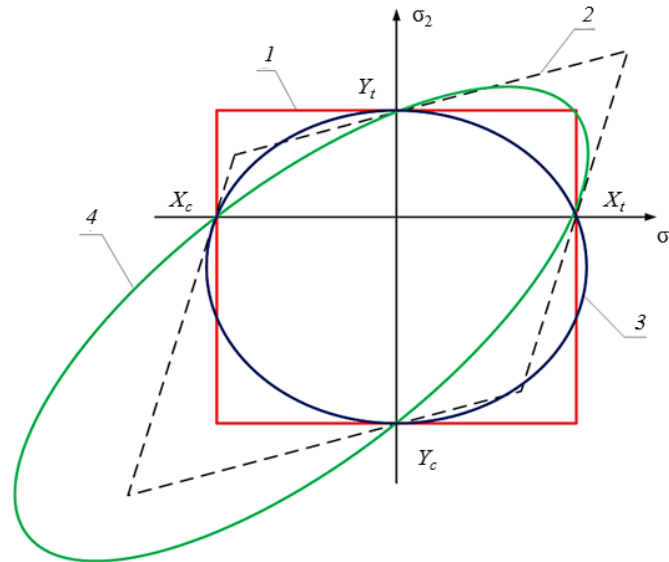


Рис. 2. Схема примеров предельных кривых по критериям максимальных напряжений (1) и деформаций (2), а также квадратичным Цзя–Хилла (3) и Цзя–Ву (4)

Данные критерии разрушения не выводятся аналитически, а строятся на основе анализа и статистического обобщения данных, полученных экспериментальным путем.

Для плосконапряженного состояния пластины не учитывают слагаемые с компонентами по толщине (по третьей координате):

$$f = F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2. \quad (7)$$

Вообще квадратичные критерии являются частным случаем критерия Мизеса–Хилла, его вариацией для анизотропных материалов [25].

Критерий Цзя–Хилла (Tsai–Hill) основывается на обобщенной теории прочности Хилла для ортотропных пластичных материалов [26], которая была адаптирована для композитов [27].

Для функции критерия  $f(\sigma_{ij})$  по уравнениям (6) и (7) коэффициенты меняются в зависимости от того, сжатие или растяжение происходит в исследуемом монослое:

$$F_{11} = \frac{1}{X^2}, \quad F_{22} = \frac{1}{Y^2}, \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_{12} = -\frac{1}{2X^2}.$$

При сжатии берутся пределы прочности для сжатия, при растяжении – для растяжения:

- $\sigma_1 \geq 0 \Rightarrow X = X_t$  – предел прочности при растяжении по оси  $x$ ;
- $\sigma_1 < 0 \Rightarrow X = X_c$  – предел прочности при сжатии по оси  $x$ ;
- $\sigma_2 \geq 0 \Rightarrow Y = Y_t$  – предел прочности при растяжении по оси  $y$ ;
- $\sigma_2 < 0 \Rightarrow Y = Y_c$  – предел прочности при сжатии по оси  $y$ .

Выражение критерия в общем виде примет вид:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{2X^2} \leq 1. \quad (8)$$

В критерии Аззи–Цая–Хилла (*Azzi–Tsai–Hill*) выражение совпадает с критерием Цая–Хилла, за исключением того, что берется абсолютное значение в слагаемом, содержащем совместные нормальные напряжения. Разница между критериями проявляется, когда нормальные напряжения противоположны по знаку:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{|\sigma_1\sigma_2|}{2X^2} \leq 1. \quad (9)$$

Другой достаточно простой критерий, основывающийся на теории Хилла, – критерий Ямады–Суна (*S.E. Yamada u C.T. Sun*) [28] основан на предположении о разрушении слоя от трещин вдоль волокон. Его выражение можно записать в виде:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \leq 1. \quad (10)$$

Неудобство критериев (9) и (10) заключается в том, что сначала надо определить знак компонент тензора напряжений, чтобы выбрать данные по прочности, необходимые для проверки критериев. Этому неудобства лишен следующий критерий.

Критерий Хоффмана (*Hoffman*) является расширенным вариантом критерия Цая–Хилла и учитывает свойства при растяжении или сжатии в одном критерии [29]. Для него коэффициент  $F_{12}$  определяют следующим образом:

$$F_{12} = \frac{1}{X_t X_c}, \quad (11)$$

а формула самого критерия записывается в виде:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_1}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2}{Y_t Y_c} \leq 1. \quad (12)$$

Работы по критериям прочности анизотропных материалов широко развили Цай и Ву (*Tsai–Wu*) [30], построившие критерий в виде полинома второго порядка, считающийся наиболее универсальным и содержащийся во всех современных расчетных программных пакетах. Полиномиальные коэффициенты в нем выражаются следующим образом:

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}, \quad F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}, \quad F_{66} = \frac{1}{S^2}, \quad F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, \quad F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}.$$

Коэффициент  $F_{12}$  выражает связь свойств материала в направлениях 1 и 2 и определяется при испытании на двухосное нагружение, для которого получают предел прочности  $\sigma_1 = \sigma_2 = P$  (все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю), и выражается формулой

$$F_{12} = \frac{1}{2P^2} \left[ 1 - P \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - P^2 \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \right]. \quad (13)$$

Однако двухосное растяжение может быть заменено на одноосное испытание однонаправленных образцов композитов с укладкой волокон  $\pm 45$  градусов [31]. Тогда значение компонент будет составлять  $\sigma_1 = \sigma_2 = \tau_{12} = U/2$  (остальные компоненты тензора напряжений равны нулю), где  $U$  – предел прочности образца при растяжении:

$$F_{12} = \frac{2}{U^2} \left[ 1 - \frac{U}{2} \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - \frac{U^2}{4} \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{S^2} \right) \right]. \quad (14)$$

Можно выразить коэффициент  $F_{12}$  также через предел прочности при сдвиге ( $V$ ) при растяжении однонаправленного образца с волокнами, уложенными под углом 45 градусов:  $+\sigma_1 = -\sigma_2 = V$  (все остальные компоненты тензора напряжений равны нулю):

$$F_{12} = -\frac{1}{2V^2} \left[ 1 - V \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} - \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) - V^2 \left( \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \right]. \quad (15)$$

Как видно из представленного описания критерия, его серьезным недостатком является как раз сложное экспериментальное определение коэффициента  $F_{12}$ . При отсутствии данных по двухосным испытаниям применяют аппроксимацию  $F_{12} = \phi' \sqrt{F_{11} F_{22}}$ , где коэффициент  $\phi'$  подбирают в пределах  $-1 < \phi' < 1$  или же принимают равным  $\phi' = -1/2$ .

Существуют и встречаются в расчетном программном обеспечении (например, в Nastran фирмы MSC. Software) следующие квадратичные критерии, разработанные и применяемые в основном для анизотропных древесных материалов, – особые критерии Ханкинсона, Коуина и Норриса.

Первый критерий основан на формуле Ханкинсона, полученной для древесных материалов [32]:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_0 \sigma_{90}}{\sigma_0 \sin^n \alpha + \sigma_{90} \cos^n \alpha}, \quad (16)$$

где  $\sigma_\alpha$  – предел прочности в образце с волокнами, направленными под углом  $\alpha$  к продольной оси;  $\sigma_0$  – предел прочности образца, в котором волокна совпадают с продольной осью;  $\sigma_{90}$  – предел прочности образца, в котором волокна перпендикулярны продольной оси.

В первоначальном виде выведено квадратичное выражение, т. е.  $n=2$ . В этом виде формула является частным случаем теории прочности для анизотропных материалов Цая–Ву. При представлении формулы в форме критерия Цая–Хилла, получают выражения для коэффициента  $F_{12}$  по критерию Ханкинсона (*Hankinson*):

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{S^2} \right]. \quad (17)$$

Аналогично для критерия Коуина (*Cowin*) [33, 34] для полиномиального вида, подобного критерию Цая–Ву, будет отличаться выражение для совместного коэффициента  $F_{12}$ :

$$F_{12} = \frac{1}{\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}} - \frac{1}{2S^2}. \quad (18)$$

Критерий Норриса (*Norris*) первоначально разработан для древесины – для расчета клееного бруса [35, 36]. В этом случае коэффициент  $F_{12}$  выражается через пределы прочности при растяжении:

$$F_{12} = -\frac{1}{2X_t Y_t}. \quad (19)$$

Преимуществом критериев по объединенным значениям будет быстрое вычисление результата. Исследователи в работе [14] отмечают также математическую завершенность применяемой единой формулы, объединяющей все значения и описывающей плавную замкнутую критическую поверхность в пространстве напряжений (или проекцию – кривую линию для плосконапряженного состояния).

**Критерии по виду разрушения**

В отличие от полиномиальных, где все компоненты тензора напряжений образца рассматривались совместно в одном выражении, следующим вариантом анализа композитов были предложенные Хашином, а также Паком критерии, основанные на разделении разрушения по их виду в отдельные анализируемые выражения. Разрушение матрицы и волокон рассматриваются отдельно, также отдельно исследуется разрушение этих элементов при сжатии или растяжении [37–42].

В простом *критерии Пака* для волокон рассматривается просто разрушение по максимальным напряжениям:

$$f_F = \frac{|\sigma_1|}{X}, \quad (20)$$

а разрушение матрицы анализируется по формуле

$$f_M = \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2}. \quad (21)$$

Пределы прочности определяются в зависимости от напряженно-деформированного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \geq 0 &\Rightarrow X = X_t; \quad \sigma_1 < 0 \Rightarrow X = X_c; \\ \sigma_2 \geq 0 &\Rightarrow Y = Y_t; \quad \sigma_2 < 0 \Rightarrow Y = Y_c. \end{aligned}$$

В *модифицированном критерии Пака* используется более расширенная формула для анализа разрушения матрицы:

$$f_M = \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} + \left( \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_2. \quad (22)$$

Разрушение наступает, когда максимальное из данных соотношений достигнет 1:

$$f = (f_F, f_M)_{\max} \leq 1. \quad (23)$$

*Критерий плоскости разрушения Пака* рассматривает отдельно разрушение волокон и разрушение матрицы между волокнами, которое происходит по плоскости разрушения. Разрушение волокон определяется или по критерию максимальных напряжений:

$$f_F = \frac{\sigma_1}{X} \quad (24)$$

при  $\sigma_1 \geq 0 \Rightarrow X = X_t$ ;  $\sigma_1 < 0 \Rightarrow X = X_c$ , или по критерию максимальных деформаций:

$$f_F = \frac{\varepsilon_1}{X_\varepsilon} \quad (25)$$

при  $\varepsilon_1 \geq 0 \Rightarrow X_\varepsilon = X_{\varepsilon t}$ ;  $\varepsilon_1 < 0 \Rightarrow X_\varepsilon = X_{\varepsilon c}$ .

Схема положения поверхности разрушения показана на рис. 3 [40].

Разрушение матрицы рассматривается в трех различных вариантах. Предельная кривая строится на концепции кругов Мора (рис. 4) и имеет зоны, соответствующие разным вариантам разрушения – А, В, С. Основные предельные значения на схеме приведены в обозначениях автора критерия.

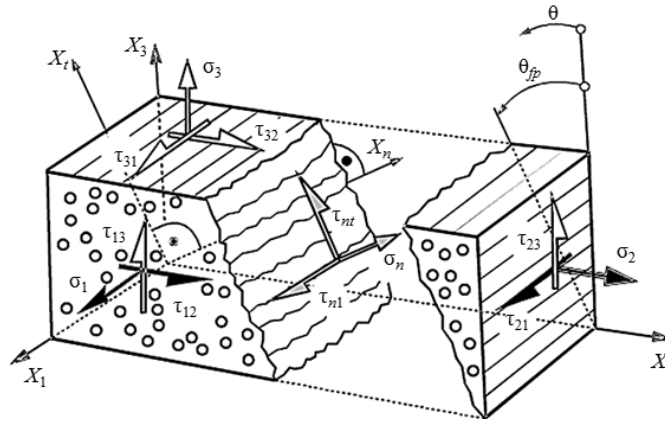


Рис. 3. Схема разрушения поверхности

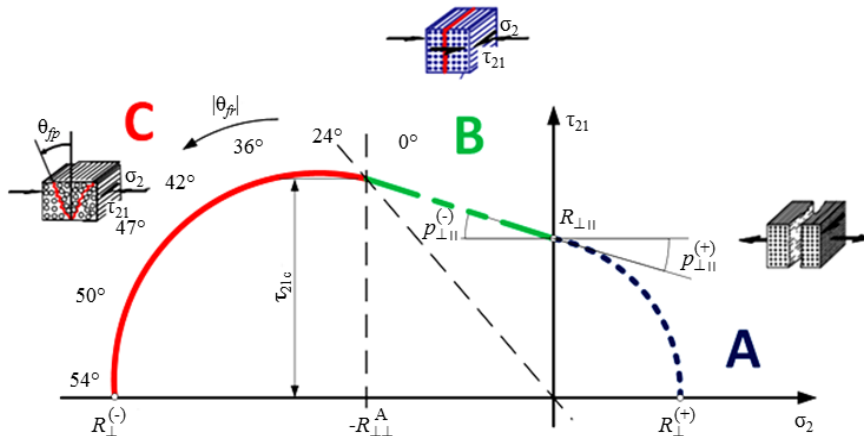


Рис. 4. Предельная кривая на плоскости  $(\sigma_2, \tau_{21})$  [40]

Предельную кривую критерия на плоскости напряжений формируют семь параметров. Основные выражения имеют вид, указанный в табл. 2.

Таблица 2

Соотношения критерия Пака

Зона	Выражение	Границы
A	$f_M = \sqrt{\left(\frac{\tau_{21}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 + \left(1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{R_{\perp\perp}^{(+)}}{R_{\perp\parallel}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel}^{(+)}}\right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_2}{R_{\perp\parallel}}$	$\sigma_2 \geq 0$
B	$f_M = \frac{1}{R_{\perp\parallel}} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + (p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_2 \right)$	$\sigma_2 < 0$ и $0 \leq \left  \frac{\sigma_2}{\tau_{21}} \right  \leq \frac{R_{\perp\perp}^A}{ \tau_{21c} }$
C	$f_M = \left[ \left( \frac{\tau_{21}}{2(1+p_{\perp\perp}^{(-)})R_{\perp\parallel}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{R_{\perp\perp}^{(-)}} \right)^2 \right] \frac{R_{\perp\perp}^{(-)}}{(-\sigma_2)}$	$\sigma_2 < 0$ и $0 \leq \left  \frac{\tau_{21}}{\sigma_2} \right  \leq \frac{ \tau_{21c} }{R_{\perp\perp}^A}$

Следующие значения на диаграмме будут вычисляться по соотношениям

$$R_{\perp\perp}^A = \frac{R_{\perp\parallel}}{2p_{\perp\parallel}^{(-)}} \left( \sqrt{1 + 2p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{R_{\perp\perp}^{(-)}}{R_{\perp\parallel}}} - 1 \right), \quad (26)$$

$$\tau_{21c} = R_{\perp\parallel} \sqrt{1 + 2p_{\perp\perp}^{(-)}}, \quad (27)$$

где  $p_{\perp\perp}^{(-)} = p_{\perp\parallel}^{(-)} \frac{R_{\perp\perp}^A}{R_{\perp\parallel}}$ .

Угол наклона плоскости разрушения (угол разрушения) для варианта разрушения С, когда он ненулевой (см. диаграмму на рис. 4), определяют следующим выражением:

$$\cos\theta_{fr} = \sqrt{\frac{1}{2(1+p_{\perp\perp}^{(-)})} \left[ \left( \frac{R_{\perp\perp}^A}{S} \right)^2 \left( \frac{\tau_{12}}{\sigma_2} \right)^2 + 1 \right]} \quad (28)$$

В приведенных первоначально обозначениях предельных значений получим:

$$R_{\perp\parallel} = S, \quad R_{\perp}^{(-)} = X_c, \quad R_{\perp}^{(+)} = X_t.$$

*Критерий Хашина (Hashin).* В 1973 г. Хашин использовал свои экспериментальные исследования и предложил критерий на основе двух различных вариантов разрушения, один из которых связан с разрушением волокон, а другой – с разрушением матрицы. Критерий предполагал квадратичную связь между напряжениями [43]. Данный вариант критерия иногда в научно-технической литературе и расчетном программном обеспечении обозначают как критерий Хашина–Ротема (Hashin–Rotem).

В 1980 г. Хашин усовершенствовал уравнения для разрушения матрицы при сжатии, основываясь на инвариантах напряжений [44].

Критерий Хашина рассматривает отдельно четыре вида разрушения композиционного материала, его выражения приведены в табл. 3.

Таблица 3

Основные соотношения критерия Хашина

Элемент	Выражение для растяжения	Выражение для сжатия
Матрица	$f_M^+ = \frac{\sigma_2^2}{Y_t^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2}$	По критерию Хашина–Ротема (1973 г.): $f_M^- = \frac{\sigma_2^2}{Y_c^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2}$ По критерию Хашина (1980 г.): $f_M^- = \frac{\sigma_2^2}{4S^2} + \left[ \left( \frac{Y_c^2}{4S^2} \right) - 1 \right] \frac{\sigma_2^2}{Y_c^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2}$
Волокно	$f_F^+ = \frac{\sigma_1^2}{X_t^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2}$	$f_F^- = -\frac{\sigma_1}{X_c}$ или $f_F^- = \frac{\sigma_1^2}{X_c^2}$

Разрушение наступает, когда максимальное из данных соотношений достигнет 1:

$$f = (f_M^+, f_M^-, f_F^+, f_F^-)_{\max} \quad (29)$$

В разных программных пакетах под названием критерия Хашина могут использоваться различные его модификации. Так, в программном обеспечении Nastran In-CAD фирмы Autodesk используется дополнительный коэффициент  $0 < a < 1$ , равный 1 и дающий возможность пользователю изменить вклад сдвиговых напряжений в выражение для растяжения волокон:

$$f_M^+ = \frac{\sigma_2^2}{Y_t^2} + a \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \quad (30)$$

Среди промежуточных критериев, можно отметить *критерий Кристенсена (Christensen)*, который использует разделение по видам разрушения, но при этом

применяет полиномиальную зависимость для каждой *моды* разрушения [45]. Этот критерий аналогичен простому критерию Пака в том, что рассматриваются два варианта разрушения: разрушение матрицы и разрушение армирующих волокон. Для плоско-напряженного состояния получим критерий для анализа разрушения матрицы

$$f_M = \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} + \left( \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_2 \quad (31)$$

и критерий для анализа разрушения волокон

$$f_F = \left( \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_1 + \frac{\sigma_1^2}{X_t X_c}. \quad (32)$$

Следующим наиболее современным типом данных критериев является *критерий LaRC* [46, 47], названный по Исследовательскому центру НАСА в Лэнгли (NASA Langley Research Center), в котором и был разработан. Данный критерий основан на той же концепции, что и критерии Пака и Хашина, с его помощью рассматривается раздельное разрушение волокон и матрицы, а также используется принцип плоскости разрушения Пака для анализа разрушения между волокнами. При этом при рассмотрении сжатия волокон возможен вариант разрушения от волнообразного перегиба волокон при локальной потере устойчивости в одном направлении – так называемый *kinking* (рис. 5). Путем вычисления смещения и поворота волокон под нагрузкой при потере устойчивости этот критерий применяется для разрушения матрицы уже в повернутой системе координат.

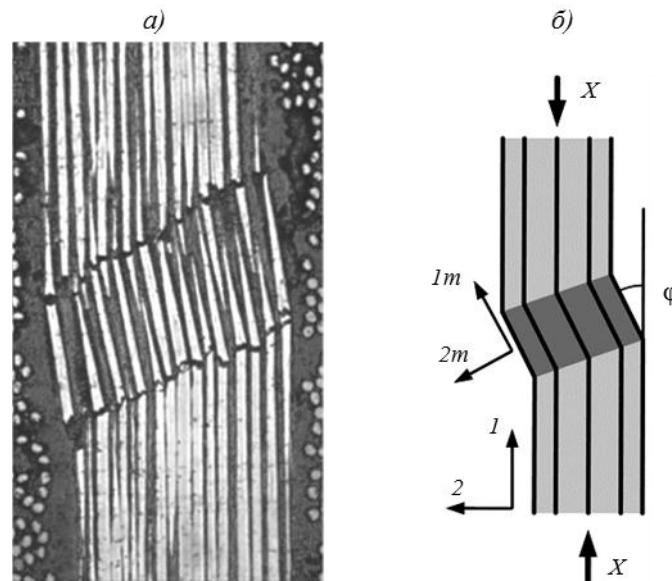


Рис. 5. Смещение волокон в углепластике [44] (а) и схематичное изображение (б)

При анализе разрушения матрицы используется расчет соответствующей *in-situ* («по месту») прочности. Данная концепция следует из того, что прочность отдельного слоя в реальных условиях зависит от множества взаимовлияющих факторов и, соответственно, его разрушение отличается от разрушения одного отдельного слоя. Например, прочность слоя, находящегося между другими разнонаправленными слоями, будет выше, чем при его рассмотрении отдельно. Умеренное поперечное сжатие также увеличивает *in-situ* прочность при сдвиге слоя. Оценка прочности *in-situ* также различна для тонких и толстых слоев. Толстый слой представляет собой слой, в котором щелевая трещина, возникающая в матрице, остается намного меньше толщины слоя. Для углепластиков с эпоксидной матрицей рекомендуемый предельный размер для различия между тонкими и толстыми слоями составляет 0,7 мм.

Компоненты прочности *in-situ* для тонких слоев вычисляются по следующим формулам:

$$Y_t^{is} = \sqrt{\frac{8G_{Ic}}{\pi t_k \Lambda_{22}}}; \quad S_L^{is} = \sqrt{\frac{8G_{IIc}}{\pi t_k \Lambda_{44}}}, \quad (33)$$

где  $t_k$  – толщина слоя,  $\Lambda$  – тензор, введенный в работе [48], его компоненты равны  $\Lambda_{22} = 2\left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{21}^2}{E_1}\right)$  и  $\Lambda_{44} = \frac{1}{G_{12}}$ ,  $G_{Ic}$ ,  $G_{IIc}$  – критическое значение вязкости разрушения по модам I и II;  $g$  – отношение вязкостей разрушения –  $g = G_{Ic}/G_{IIc}$ ;  $E_1$ ,  $E_2$  – модули упругости слоя по направлению волокон и поперек;  $G_{12}$  – модуль сдвига;  $\nu_{12}$  – коэффициент Пуассона.

Для толстых слоев толщина слоя уже не имеет значения:

$$Y_t^{is} = 1,2\sqrt{2Y_t}; \quad S_L^{is} = \sqrt{2Y_L}. \quad (34)$$

Слой, как правило, не часто разрушается в плоскости максимального напряжения сдвига. Это связано с внутренним трением и учитывается в критерии разрушения LaRC двумя коэффициентами, характеризующими внутреннее трение: поперечное –  $\eta_T$  и продольное –  $\eta_L$  (по смыслу эти коэффициенты близки к параметрам  $p_{\perp\perp}^{(-)}$ ,  $p_{\perp\parallel}^{(-)}$ ). Предлагается определять их или из экспериментов, или по формулам:

$$\eta_T = \frac{-1}{\text{tg}(2\theta_{fr})}; \quad (35)$$

$$\eta_L \approx -\frac{S_L^{is} \cos(2\theta_{fr})}{Y_c \cos^2(\theta_{fr})}. \quad (36)$$

Угол  $\theta_{fr}$ , при котором будут максимальны сдвиговые напряжения в поперечной направлению волокон плоскости, принимают равным 53 градуса или находят экспериментально.

Преобразованные напряжения при потере устойчивости (*kinking*) получают с использованием метода смещения оси, пересчитывая значения исходных напряжений по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{1m} &= \sigma_1 \cos^2(\varphi) + \sigma_2 \sin^2(\varphi) + 2\tau_{12} \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi), \\ \sigma_{2m} &= \sigma_1 \sin^2(\varphi) + \sigma_2 \cos^2(\varphi) - 2\tau_{12} \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi), \\ \tau_{12m} &= -\sigma_1 \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \sigma_2 \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \tau_{12} (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)). \end{aligned} \quad (37)$$

Угол смещения оси при простом сжатии, т. е. в случае  $\sigma_1 = -X_c$ ,  $\sigma_2 = \tau_{12} = 0$ , определяют как:

$$\varphi_c = \text{arctg} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \left( \frac{S_L^{is}}{X_c} + \eta_L \right) \left( \frac{S_L^{is}}{X_c} \right)}}{2 \left( \frac{S_L^{is}}{X_c} + \eta_L \right)} \right). \quad (38)$$

Полный угол смещения будет равен

$$\varphi = \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X_c)\varphi_c}{G_{12} + \sigma_1 - \sigma_2} \quad (39)$$

Основные соотношения критерия LaRC приведены в табл. 4 [49].

Таблица 4

Основные соотношения критерия LaRC

Элемент	Выражение для растяжения ( $\sigma_2 \geq 0$ )	Выражение для сжатия ( $\sigma_2 < 0$ )	
Матрица	$f_M^+ = g \left( \frac{\sigma_2}{Y_T^{is}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_L^{is}} \right)^2 + (1-g) \left( \frac{\sigma_2}{Y_T} \right)$	$\sigma_1 < Y_c;$ $f_M^- = \left( \frac{\tau_{Tm}^{eff}}{S_T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{Lm}^{eff}}{S_L^{is}} \right)^2$	$\sigma_1 \geq Y_c;$ $f_M^- = \left( \frac{\tau_T^{eff}}{S_T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_L^{eff}}{S_L^{is}} \right)^2$
Волокно	$f_F^+ = \frac{\varepsilon_1}{X_c}$	$\sigma_{2m} < 0;$ $f_F^- = \frac{ \tau_{12m}  + \eta_L \sigma_{2m}}{S_L^{is}}$	$\sigma_{2m} \geq 0;$ $f_M^+ = g \left( \frac{\sigma_{2m}}{Y_T^{is}} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12m}}{S_L^{is}} \right)^2 + (1-g) \left( \frac{\sigma_{2m}}{Y_T} \right)$

Примечание. Параметр  $S_T$  – предел прочности при сдвиге в плоскости разрушения.

Для сжатия матрицы рассматриваются эффективные касательные напряжения, основанные на критерии Мора–Кулона:

$$\begin{aligned} \tau_T^{eff} &= -\sigma_2 \cos \theta_{fr} (\sin \theta_{fr} - \eta_T \cos \theta_{fr}); \\ \tau_L^{eff} &= |\tau_{12}| \cos \theta_{fr} + \eta_L \sigma_2 \cos \theta_{fr}. \end{aligned} \quad (40)$$

При возможном повороте при смещении волокон при  $\sigma_1 < Y_c$ :

$$\begin{aligned} \tau_{Tm}^{eff} &= -\sigma_{2m} \cos \theta_{fr} (\sin \theta_{fr} - \eta_T \cos \theta_{fr}); \\ \tau_{Lm}^{eff} &= |\tau_{12m}| \cos \theta_{fr} + \eta_L \sigma_{2m} \cos \theta_{fr}. \end{aligned} \quad (41)$$

На рис. 6 приведены результаты вторых Всемирных соревнований по предсказанию разрушения композитов (World-Wide Failure Exercise), на которых авторы критерия LaRC представили совпадение результатов экспериментов со своими результатами расчетов, а также с результатами, полученными для конкурирующих критериев (по максимальным напряжениям, Пака и в двух вариантах критерия Хашина и Суна) [50].

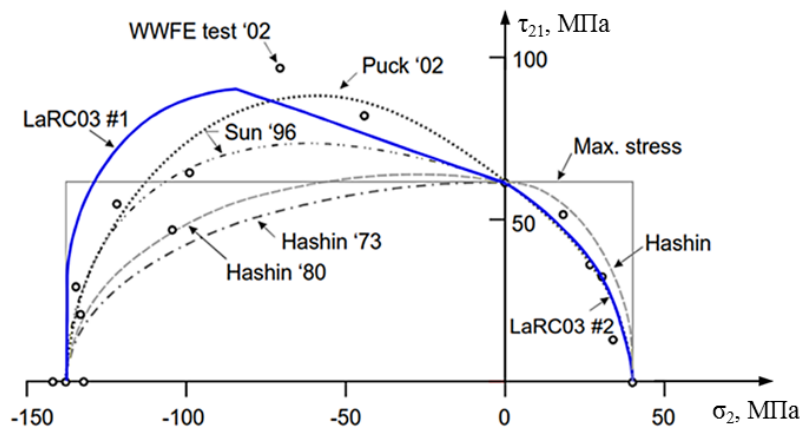


Рис. 6. Предельные кривые разных критериев на плоскости ( $\sigma_2, \tau_{21}$ ) при аппроксимации данных WWFE-2 (World-Wide Failure Exercise) для однонаправленного композиционного материала E-Glass

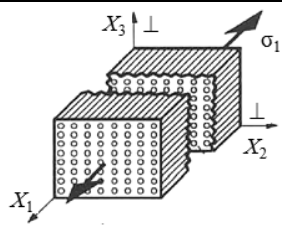
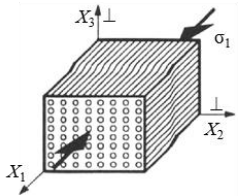
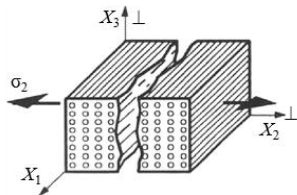
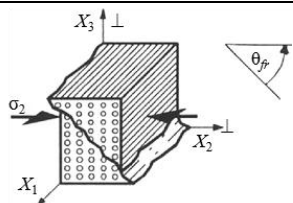
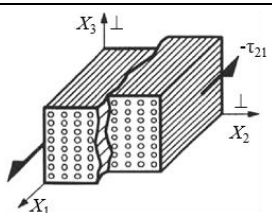
Следующим критерием, который следует отметить среди критериев по вариантам разрушения, – это *критерий Кунце (Cuntze)* [14, 51–53]. В программном обеспечении фирмы Ansys он применяется для трансверсально-изотропных однонаправленных композиционных материалов. Всего в критерий входят пять вариантов разрушения – *мод*: два варианта разрушения волокна – растяжение и сжатие, три варианта разрушения матрицы между волокнами – растяжение, сжатие и сдвиг. Для каждого из пяти вариантов рассчитываются эквивалентные напряжения, которые основываются на инвариантах тензора напряжений для трансверсально-изотропного материала. Согласно работе [54], в общем виде инварианты выражаются так:

$$I_1 = \sigma_1; I_2 = \sigma_2 + \sigma_3; I_3 = \tau_{31}^2 + \tau_{21}^2; I_4 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 4\tau_{23}^2; I_5 = (\sigma_2 - \sigma_3)(\tau_{31}^2 - \tau_{21}^2) - 4\tau_{23}\tau_{31}\tau_{21}. \quad (42)$$

В табл. 5 приведены основные соотношения критерия по *модам*.

Таблица 5

Описание *мод* разрушения критерия Кунце

Мода разрушения	Выражение	Визуализация
Растяжение волокон	$f_1 = \frac{\sigma_{eq1}}{X_t} = \frac{I_1}{X_t}$	
Сжатие волокон	$f_2 = \frac{\sigma_{eq2}}{X_t} = \frac{-I_1}{X_c}$	
Растяжение матрицы	$f_3 = \frac{\sigma_{eq3}}{Y_t} = \frac{I_2 + \sqrt{I_4}}{2Y_t}$	
Сжатие матрицы	$f_4 = \frac{\sigma_{eq4}}{Y_c} = (b_{\perp}^r - 1) \frac{I_2}{Y_c} + \frac{b_{\perp}^r \sqrt{I_4}}{Y_c}$	
Сдвиг матрицы	$f_5 = \frac{\sigma_{eq5}}{S} = \frac{I_3^{3/2}}{S^3} + b_{\perp \parallel} \frac{I_2 I_3 - I_5}{S^3}$	

В критерии введены коэффициенты  $b$ , которые зависят от внутреннего трения в композиционном материале, пренебрежение им (трением) ведет к неточному результату. Приведем соотношения для данных коэффициентов. При достаточном наборе экспериментальных данных параметр  $b_{\perp\parallel}$  определяют по предельным данным кривой (рис. 4) [53–55]:

$$b_{\perp\parallel} = \frac{S^4 - \tau_{21c}^4}{2R_{\perp\perp}^A \cdot \tau_{21c}^2 \cdot S}. \quad (43)$$

При отсутствии достаточных данных испытаний Кунцем был дополнен критерий путем выражения параметров через критические значения по кругам Мора – по аналогии с коэффициентами критерия LaRC ( $\eta_T, \eta_L$ ) и критерия Пака ( $p_{\perp\perp}^{(c)}, p_{\perp\parallel}^{(c)}$ ):

$$b_{\perp\parallel} = 2 \mu_{\perp\parallel}. \quad (44)$$

Параметр  $b_{\perp\perp}$  можно определить через двухосное сжатие по углу разрушения:

$$b_{\perp\perp} = \frac{1}{1 - \mu_{\perp\perp}}, \quad (45)$$

где коэффициент трения  $\mu_{\perp\perp}$  определяют через угол площадки разрушения из эксперимента на сжатие:

$$\mu_{\perp\perp} = -\cos\left(\frac{2\theta_{fr}}{180^\circ} \pi\right). \quad (46)$$

Схема эксперимента на сжатие, а также расчетная схема, демонстрирующая связь между коэффициентом трения и углом плоскости разрушения при испытании, приведены на рис. 7.

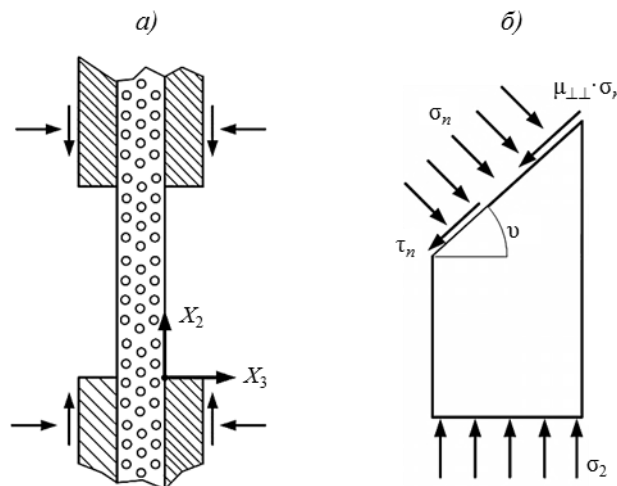


Рис. 7. Определение угла плоскости разрушения: схема эксперимента (а) и плоскость разрушения (б)

Приведем данные испытаний, используемые авторами критерия в работе [14], которые наглядно демонстрируют экспериментальное подтверждение критерия. На рис. 8 приведены данные испытаний на сложноподвиженное состояние трубообразных образцов из стеклопластика и углепластика и построенная для данных материалов предельная кривая критерия Кунце.

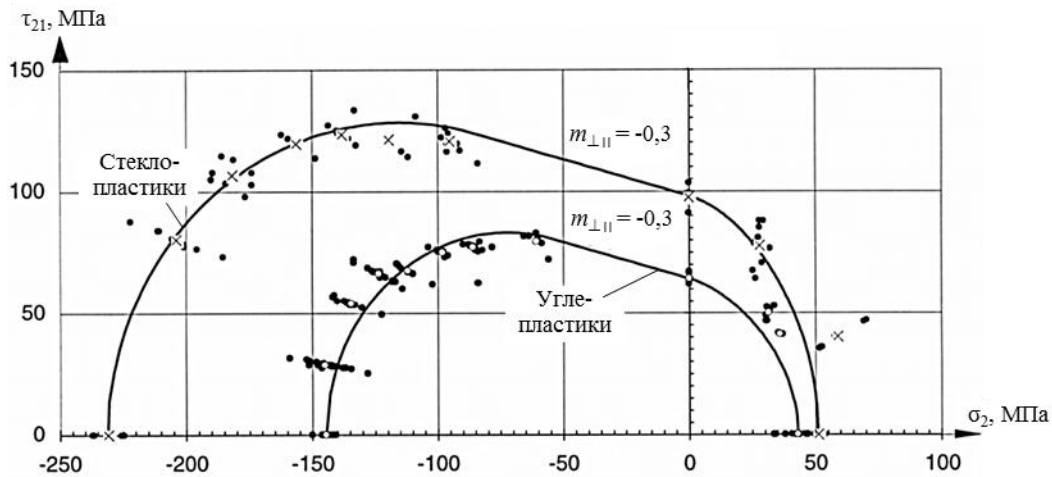


Рис. 8. Предельные кривые критерия Кунце на плоскости  $(\sigma_2, \tau_{21})$  при аппроксимации данных для однонаправленного композита из стеклопластика E-Glas и углепластика T300

На рис. 9 на одном графике приведены результаты испытаний на определение угла разрушения для углепластика T300 (на основе эпоксидной матрицы) на фоне его результатов испытаний на прочность с предельной кривой критерия. График иллюстрирует используемый в критериях по формам разрушения принцип плоскости разрушения: в зонах А и В угол разрушения равен нулю, в зоне С он возрастает и достигает значения, равного приблизительно  $\theta_{fr}=53$  градуса.

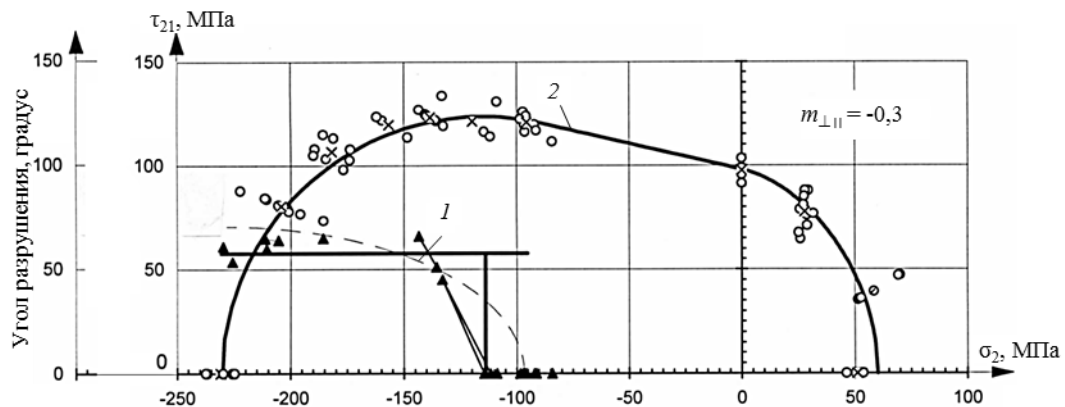


Рис. 9. Результаты испытаний на определение угла разрушения  $\theta_{fr}$  (1) углепластика T300 и результаты его испытаний на прочность (2)

По демонстрируемым результатам данные критерии довольно точно предсказывают разрушение однонаправленных композитов, но при этом требуются довольно затратные неочевидные вычисления и значительное количество дополнительных экспериментальных данных.

### Заключения

Таким образом, рассмотрены основные критерии разрушения композитов, применяемые в настоящее время в расчетном программном обеспечении. Указаны основные соотношения критериев, по которым можно получить основное представление о них. Более подробное описание соотношений и вывод формул для каждого критерия

можно получить по ссылкам на исходные работы исследователей в списке используемых научно-технических литературных источников.

Приведенные критерии можно разделить на:

- критерии по предельным значениям – наиболее простые, не требующие сложных вычислений или проведения дополнительных экспериментальных исследований;
- критерии по объединенным значениям – объединяющие значения компонент тензора напряжений в общем, легко анализируемое, полиномиальное уравнение;
- критерии по виду разрушения – наиболее сложные, кусочно-заданные функции, рассматривающие различные виды разрушения отдельно.

Критерии могут обладать различной точностью описания свойств ПКМ. В случае отсутствия достаточного набора экспериментальных данных необходим перебор всех основных критериев с выбором самого консервативного результата. Во всех приведенных критериях рассматривается разрушение отдельного слоя, обычно рассматриваемое как разрушение всей конструкции. Критерии также дают возможность рассматривать прогрессирующее разрушение конструкции, ослабленной на один разрушенный слой. Данные критерии соответствуют структурно-феноменологическому подходу при решении задач прочности ПКМ. Они выводятся на основе анализа и статистического обобщения данных, полученных экспериментальным путем. Их преимуществом будет относительная простота анализа прочности конструкции. Более точным решением задачи прочности был бы структурный метод с анализом микроструктуры материала конструкции, дающий возможность моделировать прогрессирующее разрушение материала, момент зарождения и развития трещины, усталостные и динамические разрушения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // Авиационные материалы и технологии. 2015. №1 (34). С. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33.
2. Каблов Е.Н. Композиты: сегодня и завтра // Металлы Евразии. 2015. №1. С. 36–39.
3. Каблов Е.Н. Становление отечественного космического материаловедения // Вестник РФФИ. 2017. №3. С. 97–105.
4. Яковлев Н.О., Гуляев А.И., Лашов О.А. Трещиностойкость слоистых полимерных композиционных материалов (обзор) // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2016. №4 (40). Ст. 12. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 19.03.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-4-12-12.
5. Крылов В.Д., Яковлев Н.О., Курганова Ю.А., Лашов О.А. Межслоевая трещиностойкость конструкционных полимерных композиционных материалов // Авиационные материалы и технологии. 2016. №1 (40). С. 79–85. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-1-79-85.
6. Власенко Ф.С., Раскутин А.Е. Применение полимерных композиционных материалов в строительных конструкциях // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2013. №8. Ст. 03. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 20.03.2019).
7. Кондрашов С.В., Шашкеев К.А., Попков О.В., Соловьянчик Л.В. Физико-механические свойства нанокомпозитов с УНТ (обзор) // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2016. №5 (41). Ст. 08. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 19.03.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-5-8-8.
8. Дориомедов М.С., Дасковский М.И., Скрипачев С.Ю., Шеин Е.А. Полимерные композиционные материалы в железнодорожном транспорте России (обзор) // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2016. №7 (43). Ст. 12. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 19.03.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-7-12-12.

9. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Численное моделирование и экспериментальное исследование деформирования упругопластических пластин при смятии // Математическое моделирование и численные методы. 2015. №1 (5). С. 67–82.
10. Димитриенко Ю.И., Федонюк Н.Н., Губарева Е.А., Сборщиков С.В., Прозоровский А.А., Ерасов В.С., Яковлев Н.О. Моделирование и разработка трехслойных композиционных материалов с сотовым наполнителем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. 2014. №5. С. 66–81.
11. Ерасов В.С., Яковлев Н.О., Гладких А.В., Гончаров А.А., Скиба О.В., Боярских А.В., Подживотов Н.Ю. Испытания крупногабаритных конструкций из полимерных композиционных материалов на силовом полу ГЦКИ ВИАМ им. Г.В. Акимова // Композитный мир. 2014. №1. С. 72–78.
12. Амелина Е.В., Голушко С.К., Ерасов В.С., Идимешев С.В., Немировский Ю.В., Семисалов Б.В., Юрченко А.В., Яковлев Н.О. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет // Вычислительные технологии. 2015. №5. С. 27–52.
13. Скворцов Ю.В. Механика композиционных материалов: конспект лекций. Самара: СГАУ, 2013. 94 с.
14. Cuntze R. Neue Bruchkriterien und Festigkeitsnachweise für unidirektionalen Faserkunststoffverbund unter mehrachsiger Beanspruchung: Modellbildung und Experimente. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1997. 249 p.
15. Stowell E.Z., Liu T.S. On the Mechanical Behavior of Fiber Reinforced Crystalline Solids // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1961. Vol. 9. P. 242–260.
16. Kelly A., Davies G.J. The Principles of the Fibre Reinforcement of Metals // Metallurgical Reviews. 1965. Vol. 10. No. 37. P. 1–77.
17. Захаров К.В. Критерий прочности для слоистых масс // Пластические массы. 1961. №8. С. 61–67.
18. Малмейстер А.К. Геометрия теорий прочности // Механика полимеров. 1966. №4. С. 519–534.
19. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерий прочности анизотропных материалов // Механика. 1965. №6. С. 77–83.
20. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
21. Маковенко С.Я. О взаимности компонент тензоров прочности некоторых теорий прочности анизотропных материалов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2005. №1. С. 65–70.
22. Reddy J.N., Pandey A.K. A first-ply failure analysis of composite laminates // Computers & Structures, 1987. No. 25 (3). P. 371–393. DOI: 10.1016/0045-7949(87)90130-1.
23. ANSYS Composite PrepPost User's Guide. URL: <https://ansyshelp.ansys.com> (дата обращения: 19.03.2019).
24. Муйземнек А.Ю., Карташова Е.Д. Механика деформирования и разрушения полимерных слоистых композиционных материалов: учеб. пособие. Пенза: Изд-во ПГУ, 2017. 77 с.
25. Abrate S. Criteria for yielding or failure of cellular materials // Journal of Sandwich Structures and Materials. 2008. Vol. 10. P. 5–51.
26. Hill R. The Mathematical theory of plasticity. London: Oxford University Press, 1950. 317 p.
27. Azzi V.D., Tsai S.W. Anisotropic Strength of Composites // Experimental Mechanics. 1965. Vol. 5. No. 9. P. 283–288. DOI: 10.1007/BF02326292.
28. Yamada S.E., Sun C.T. Analysis of Laminate Strength and Its Distribution // Journal of Composite Materials. 1978. No. 12 (3). P. 275–284. DOI: 10.1177/002199837801200305.
29. Hoffman O. The brittle strength of orthotropic materials // Journal of Composite Materials. 1967. No. 1. P. 200–206.
30. Tsai S.W., Wu E.M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials // Journal of Composite Materials. 1971. No. 5 (1). P. 58–80. DOI: 10.1177/002199837100500106.
31. Тарнопольский Ю.М., Киндис Т.Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Химия, 1975. 262 с.

32. Hankinson R.L. Investigation of crushing strength of spruce at varying angles of grain // Air Force Information Circular. 1921. No. 259. P. 3–15.
33. Cowin S.C. Fabric Dependence of an Anisotropic Strength Criterion // *Mechanics of Materials*. 1986. No. 5 (3). P. 251–260. DOI: 10.1016/0167-6636(86)90022-0.
34. MSC Laminate Modeler Version 2008 r2. User's Guide. MSC Software Corporation, 2008. 176 p.
35. Norris C.B. Strength of orthotropic materials subjected to combined stress: Report No. 18126. Madison: US. Department of Agriculture, Forest Products Laboratory, 1950. 41 p.
36. Mascia N.T., Simoni R.A. Analysis of failure criteria applied to wood // *Engineering Failure Analysis*. 2013. No. 35. P. 703–712. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2013.07.001.
37. Puck A., Schneider W. On Failure Mechanisms and Failure Criteria of Filament-wound Glass-Fiber/Resin Composites // *Plastic and Polymer Technology*. 1969. Vol. 00/Publisher. P. 33–43.
38. Puck A. Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung // *Kunststoffe*. 1969. Vol. 59. No. 11. P. 780–787.
39. Knops M. Analysis of Failure in Fiber Polymer Laminates. Springer Berlin Heidelberg, 2008. 205 p. DOI: 10.1007/978-3-540-75765-8.
40. Puck A., Schurmann H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Composites Science and Technology*. 1998. Vol. 58. P. 1045–1067.
41. Puck A., Kopp J., Knops M. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // *Composites Science and Technology*. 2002. Vol. 62. P. 1633–1662.
42. Puck A., Kopp J., Knops M. Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion // *Composites Science and Technology*. 2002. Vol. 62. P. 371–378.
43. Hashin Z., Rotem A.A. Fatigue Failure Criterion for Fiber Reinforced Materials // *Journal of Composite Materials*. 1973. No. 7 (4). P. 448–464. DOI: 10.1177/002199837300700404.
44. Hashin Z. Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites // *Journal of Applied Mechanics*. 1980. No. 47. P. 329–334.
45. Christensen R.M. Stress Based Yield/Failure Criteria for Fiber Composites // *International Journal of Solids and Structures*. 1997. No. 34. P. 529–543.
46. Davila C., Navin J. Failure Criteria for FRP Laminates in Plane-Stress. NASA Langley Research Center, 2003. 28 p.
47. Pinho S., Davila C., Camanho P. et al. Failure models and criteria for FRP under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity: TM-2005-213530. NASA, 2005. 69 p.
48. Laws N. A note on interaction energies associated with cracks in anisotropic solids // *Philosophical Magazine*. 1977. No. 36 (2). P. 367–372. DOI: 10.1080/14786437708244940.
49. Pinho S.T., Robinson P., Iannucci L. Fracture toughness of the tensile and compressive fibre failure modes in laminated composites // *Composites Science and Technology*. 2006. No. 66 (13). P. 2069–2079.
50. Davila C., Jaunky N., Goswami S. Failure Criteria for FRP Laminates in Plane Stress // 44<sup>th</sup> AIAA/AME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. (Norfolk, Virginia, April 7–10, 2003). 2003. 11 p. DOI: 10.2514/6.2003-1991.
51. Cuntze R., Freund A. The predictive capability of failure mode concept-based strength criteria for multidirectional laminates // *Composites Science and Technology*. 2004. Vol. 64. P. 343–377.
52. Cuntze R. Efficient 3D and 2D failure conditions for UD laminae and their application within the verification of the laminate design // *Composites Science and Technology*. 2006. Vol. 66. No. 7–8. P. 1081–1096.
53. Cuntze R. The predictive capability of failure mode concept-based strength conditions for laminates composed of UD laminae under static tri-axial stress states. Part A of the WWFE-II // *Journal of Composite Materials*. 2012. No. 46 (19–20). P. 2563–2594. DOI: 10.1177/0021998312449894.
54. Boehler J.P. Failure Criteria for Glass-Fiber Reinforced Composites under Confining Pressure // *Journal of Structural Mechanics*. 1985. No. 13. 371 p.