

УДК 66.017:620.1

Е.И. Орешко<sup>1</sup>, В.С. Ерасов<sup>1</sup>, Д.В. Гриневич<sup>1</sup>, П.В. Шершак<sup>1</sup>

## ОБЗОР КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

DOI: 10.18577/2307-6046-2019-0-9-108-126

*Проведен анализ различных критериев прочности для изотропных, ортотропных и анизотропных материалов. Описаны применяемые подходы при расчете прочности волокнистых и слоистых композиционных материалов. Рассматриваются критерии: Мизеса, Писаренко–Лебедева, Вильяма–Варнке, Друкера–Прагера, Базанта, Норриса, Кунце, Гольденבלата–Копнова, Цая–Хилла, Цая–Ву, Хашина, LaRC, Хоффмана, Пака, а также критерии прочности сэндвич-панелей и др. Представлен обзор моделей прочности материалов, используемых в программе ANSYS Mechanical APDL.*

**Ключевые слова:** прочность, критерии прочности, разрушение, композиционные материалы, расчет, метод конечных элементов.

E.I. Oreshko<sup>1</sup>, V.S. Erasov<sup>1</sup>, D.V. Grinevich<sup>1</sup>, P.V. Shershak<sup>1</sup>

## REVIEW OF CRITERIA OF DURABILITY OF MATERIALS

*In work the analysis of various criteria of durability for isotropic, orthotropic and anisotropic materials is carried out. Applied approaches are described at calculation of durability of fibrous and layered composite materials. Criteria are considered: Mises, Pisarenko–Lebedev, William–Warnke, Drucker–Prager, Bazant, Norris, Cunze, Goldenblat–Kopnov, Tsai–Hill, Tsai–Wu, Hashin, LaRC, Hoffman, Puck, criteria of durability sandwich of panels, etc. The review of strength criteria of the materials used in the ANSYS Mechanical APDL program is presented.*

**Keywords:** strength, strength criteria, failure, composite materials, calculation, finite element method.

---

<sup>1</sup>Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Государственный научный центр Российской Федерации [Federal State Unitary Enterprise «All-Russian Scientific Research Institute of Aviation Materials» State Research Center of the Russian Federation]; e-mail: admin@viam.ru

### Введение

При воздействии нагрузок на конструкцию ее прочность оценивается по предельному состоянию материалов элементов конструкции [1–3]. Когда в материале возникает предельное состояние, то происходит его переход в другое механическое состояние – упругое, пластическое или состояние разрушения [4–6].

Для того чтобы анализировать прочность конструкции требуется:

– знать предельные напряжения (или деформации) для данного материала конструкции (определяется экспериментально);

– использовать критерии прочности для оценки сопротивления материалов под нагрузкой. Если предельное состояние материала соответствует заданному допуску на остаточную деформацию, то условием критерия является текучесть материала.

Для изделий из пластичных материалов недопустимо возникновение больших остаточных деформаций, а для изделий из хрупких материалов – образование микро-трещин [7–10]. В связи с этим критерии прочности для хрупких материалов отличаются от критериев прочности для пластичных материалов, но есть и общие критерии для материалов обоих типов – например, критерий Писаренко–Лебедева.

При исследовании композиционных материалов необходимо учитывать разное сопротивление слоистых и волокнистых материалов сжатию и растяжению, которое определяется свойствами связующего и армирующей фазы. Поэтому волокнистые и слоистые материалы существенно прочнее при растяжении в направлениях армирования, чем при сжатии. Прочность при растяжении в таких материалах обычно больше в продольном направлении, при сжатии – в поперечном. Следовательно, для изучения прочности конструкций из композиционных материалов необходимо применять критерии прочности, учитывающие различную величину предельных напряжений не только по разным направлениям осей координат, но и на растяжение и сжатие.

Для моделирования конструкций из композиционных материалов применяют несколько основных способов: структурный, феноменологический и комбинированный. При структурном подходе рассматривается структура материала и микромеханическое взаимодействие между отдельными элементами компонентов при нагружении всей конструкции. Такой подход является труднореализуемым, по крайней мере при рассмотрении микромеханических свойств больших конструкций. При феноменологическом методе неоднородный композиционный материал рассматривается как усредненный сплошной материал – однородный анизотропный. Промежуточным методом будет комбинация этих двух методов. В структурно-феноменологическом методе идеализированно описывают поведение монослоя, но многослойный композиционный материал описывают как составной, включающий отдельные разноориентированные слои (оценивают свойства гетерогенных систем по физико-механическим свойствам отдельных фаз, составляющих данную систему).

Согласно структурно-феноменологическому методу, при анализе прочности многослойных оболочек сначала получают усредненные физико-механические характеристики, после чего происходит расчет конструкции, состоящей из оболочек. С помощью математической модели определяют распределение напряжений и деформаций в конструкции. Затем переходят от усредненных деформаций и напряжений в композитных оболочках к напряжениям и деформациям в каждом монослое композиционного материала – на основе его свойств, ориентации волокон, толщины и положения в пакете. На завершающем этапе на основании полученных значений делается заключение о прочности монослоя с помощью выбранного критерия разрушения.

Целью данной работы является анализ различных критериев прочности для изотропных, ортотропных и анизотропных материалов.

### Критерии прочности изотропных материалов

К базовым математическим моделям [11, 12] можно отнести пять феноменологических моделей прочности: максимальных нормальных напряжений, максимальных деформаций, максимальных касательных напряжений (модель Треска), максимальной удельной потенциальной энергии формоизменения (модель фон Мизеса) и модель Мора.

По *первой теории* прочности опасное состояние материала возникает, когда наибольшие нормальные напряжения достигают критических значений (модель работает только для хрупких материалов).

В модели *второй теории* прочности опасное состояние материала возникает из-за максимальных относительных удлинений (характеризует хрупкое разрушение при отрыве). Напряжения определяют по формуле [11, 12]

$$\sigma_{\text{пр}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3), \quad (1)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  – главные напряжения при условии  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  [13].

В целом же теоретические прогнозы, сделанные на основе первых двух рассмотренных моделей, как самостоятельные теории редко применяются в инженерных расчетах.

По *третьей теории* прочности при равенстве максимальных касательных напряжений сложное и линейное напряженное состояния эквивалентны по прочности. Напряжения определяются по формуле [11, 12]

$$\sigma_{\text{пр}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (2)$$

В *модели прочности Треска* текучесть и разрушение материала возникает из-за сдвиговых напряжений.

В *модели прочности фон Мизеса*, которая отображает наступление текучести материала, количество энергии формоизменения одинаково как при простом растяжении, так и при сложном напряженном состоянии.

Напряжения определяются по формуле [12]

$$\sigma_{\text{пр}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3)$$

*Модель прочности Мора* представляют в виде кругов напряжений (рис. 1). Модель Мора отличается от рассмотренных ранее тем, что она полностью основывается на эксперименте и с пополнением данных может уточняться.

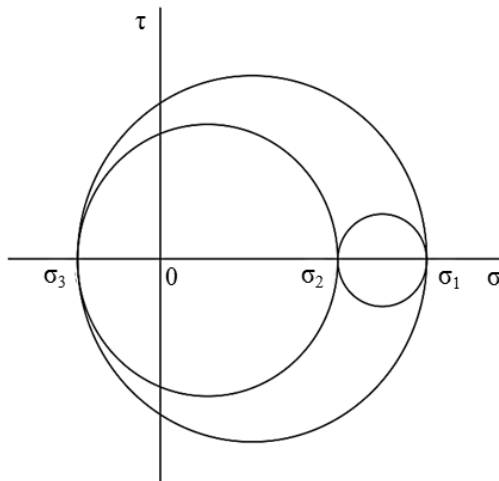


Рис. 1. Круги Мора для объемного напряженного состояния [12]

Вышеперечисленные модели справедливы для однородных и изотропных материалов. Для расчетов композиционных материалов данные теории не применимы.

### Критерии прочности композиционных материалов

Существуют сотни различных критериев прочности материалов, имеющих неоднородную структуру. Большое распространение получили феноменологические подходы, которые основаны на аппроксимации экспериментальных данных при стандартных испытаниях на одноосное сжатие, растяжение, сдвиг и т. д. Существенная их часть базируется на предложенной Х.М. Вестергардом концепции предельной поверхности [14–21], которая строится на базе опытных данных способом, который предложил М.М. Филоненко-Бородич, на основе модели прочности, использованной и модифицированной в работе [20]. Для точного описания функций прочности требуется пять параметров материала, определенных экспериментально, – прочность при трехосном равномерном сжатии; прочность при двухосном равномерном сжатии и растяжении ( $\sigma_{2c}$  и  $\sigma_{2p}$ ); прочность при одноосном сжатии и растяжении ( $\sigma_c$  и  $\sigma_p$ ) [17]. Количество

параметров материала можно уменьшить с помощью формул, полученных экспериментально и связывающих их между собой [20]. Условие прочности описывает поверхность, которая симметрична относительно диагонали пространства главных напряжений  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Строят эту поверхность, как правило, в местной цилиндрической системе координат  $(\sigma_0 - \tau_0 - \theta)$ , связанной с исходной системой  $(\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$  определенными соотношениями [20]. Поверхность прочности описывается уравнением, параметры которого определяются экспериментально (рис. 2).

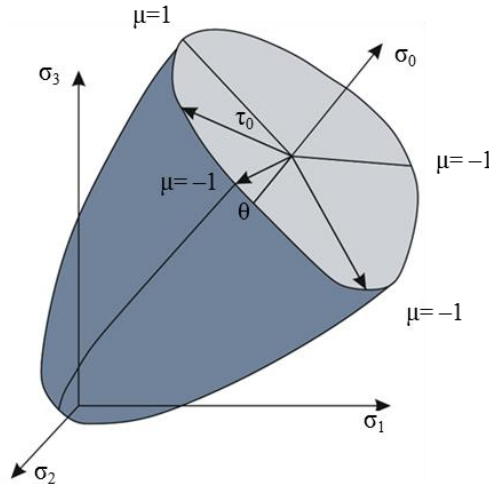


Рис. 2. Поверхность прочности в цилиндрической системе координат  $\sigma_0 - \tau_0 - \theta$  [20]

Представленная модель включает меридиональное и девиаторное сечения. Сложность в использовании данной модели в том, что для ее описания требуется пять параметров материала, которые определяются экспериментально.

*Модель критерия прочности Вильяма–Варнке* [22, 23] описывается тремя независимыми параметрами материала (пределы прочности при одноосном растяжении и одноосном и двухосном сжатии) и является развитием трехинвариантного *критерия прочности Геньева*. Изначально представленная модель прочности предназначалась для бетонов и ее применяют при расчетах структурно-неоднородных материалов с большой разницей между пределами прочности при сжатии и растяжении.

*Модель прочности Друкера–Прагера* [24] описывает разрушение материалов от пластических деформаций и определяется двумя параметрами: пределами прочности при одноосном сжатии и растяжении. Пластическое поведение характерно для сжимаемого материала. Поверхность текучести не меняется с увеличением деформаций текучести, и отсутствует закон упрочнения (рис. 3).

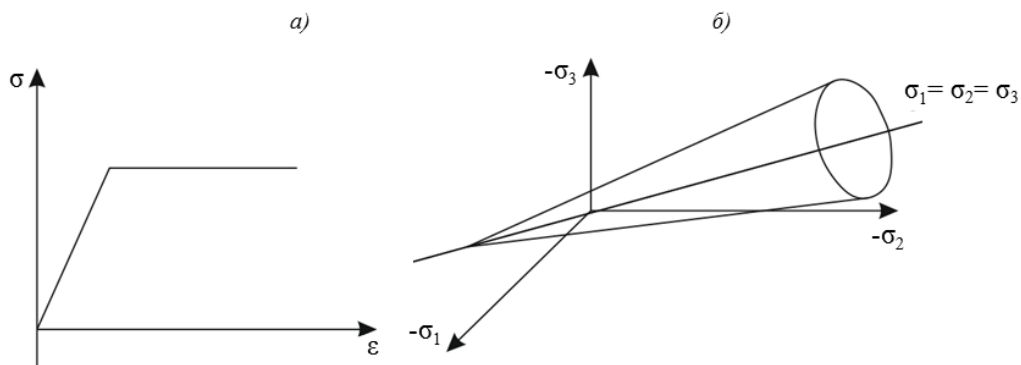


Рис. 3. Модель Друкера–Прагера (а) и поверхность текучести материала (б)

Модель критерия прочности Базанта [25] основана на тензоре деформаций и является двухинвариантным критерием разрушения для бетонов, горных пород, пластиков и других подобных материалов.

Математическая модель критерия прочности Норриса [26–30] является ортотропной и может быть применена для однонаправленных композиционных материалов с различной сопротивляемостью растяжению и сжатию.

Математические модели на основе диаграмм деформирования материалов получили широкое распространение и применяются для упрощения расчетов. Диаграмма деформирования композиционного материала зависит от направления армирования, процентного содержания армирующей фазы, режима, схемы и продолжительности нагружения, температуры испытаний. Анализ кривых деформирования композиционных материалов, способы их аппроксимации, применение в расчетах подробно изложены в работах многих авторов [20, 25, 31–42], изучающих данные вопросы.

Рассмотрим критерий разрушения трансверсально-изотропных однонаправленных композиционных материалов. Критерий прочности Кунце предполагает определение эквивалентных напряжений для всех форм хрупкого разрушения волокнистого материала аналогично критерию Губера–Мизеса–Генки, определяющего эквивалентные напряжения, приводящие к разрушению пластичных материалов. Эквивалентные напряжения ( $\sigma_{\text{экв}}$ ) в критерии прочности Кунце [29, 43–45] включают эквивалентные напряжения, которые соответствуют всем пяти формам разрушения (рис. 4).

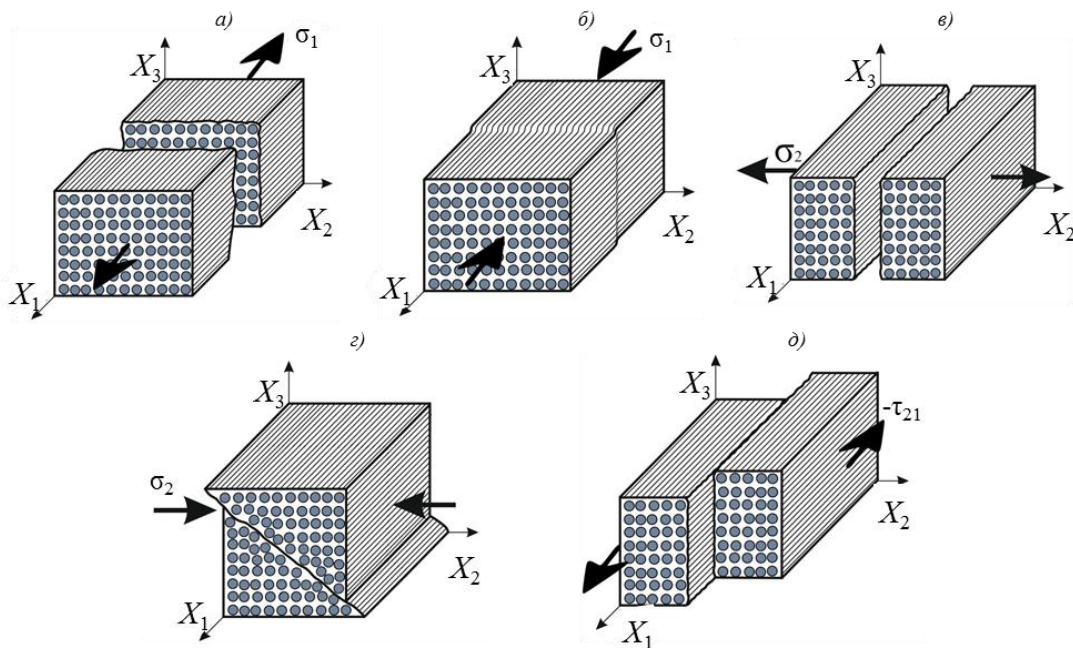


Рис. 4. Формы разрушения волокнистого материала при растяжении (а) и сжатии (б) волокон; при растяжении (в), сжатии (г) и сдвиге матрицы (д)

Для ортотропного материала при оценке прочности определяют характеристики в направлении осей ортотропии и под углом 45 градусов к ним – всего шесть компонент, которые для критерия прочности Гольденблата–Копнова схематично представлены на рис. 5. Эта модель учитывает пределы прочности при сдвиге материала, повернутого на 45 градусов, при положительном и отрицательном знаке касательных напряжений, которые экспериментально практически невозможно определить [48]. Кроме того, они не приводятся в нормативной документации на материалы (в стандартах или технических условиях).

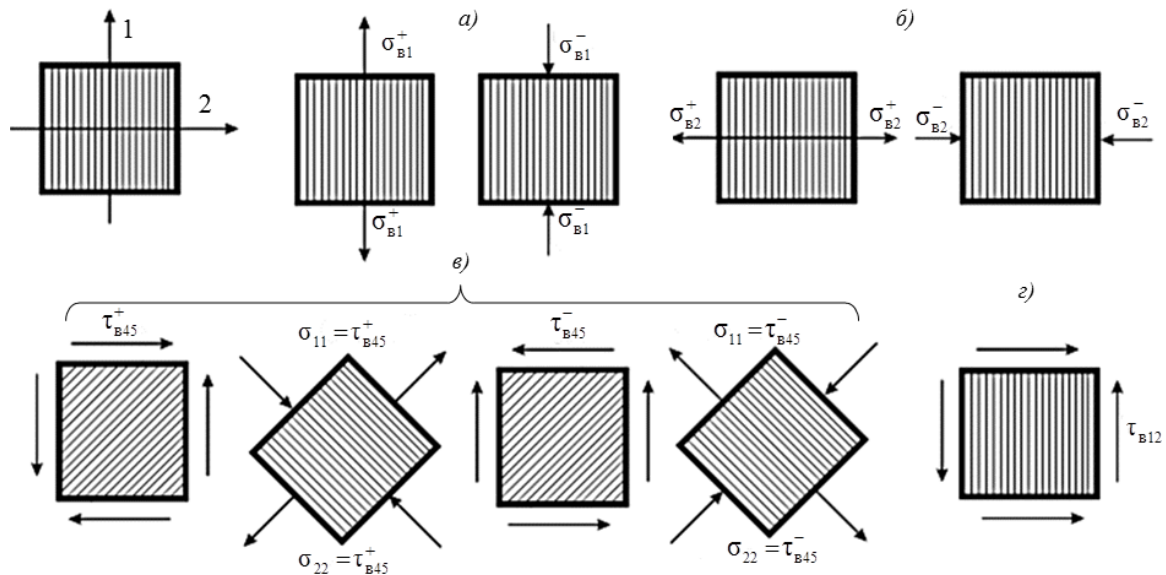


Рис. 5. Схема основных экспериментов по определению компонент тензора поверхности для критерия прочности Гольденבלата–Копнова [46, 47]:

$a$  –  $\sigma_{B1}^+$  и  $\sigma_{B1}^-$  – пределы прочности при растяжении и сжатии в направлении оси 1;  $b$  –  $\sigma_{B2}^+$  и  $\sigma_{B2}^-$  – то же в направлении оси 2;  $в$  –  $\tau_{B45}^+$  и  $\tau_{B45}^-$  – пределы прочности при сдвиге по площадкам, наклоненным к основным под углом 45 градусов;  $г$  –  $\tau_{B12}$  – предел прочности при сдвиге на площадке с осями 1 и 2

Рассмотрим критерии прочности сэндвич панелей (варианты разрушения представлены на рис. 6), которые определяются:

- прочностью сердцевины;
- складкообразованием;
- гофрированием.

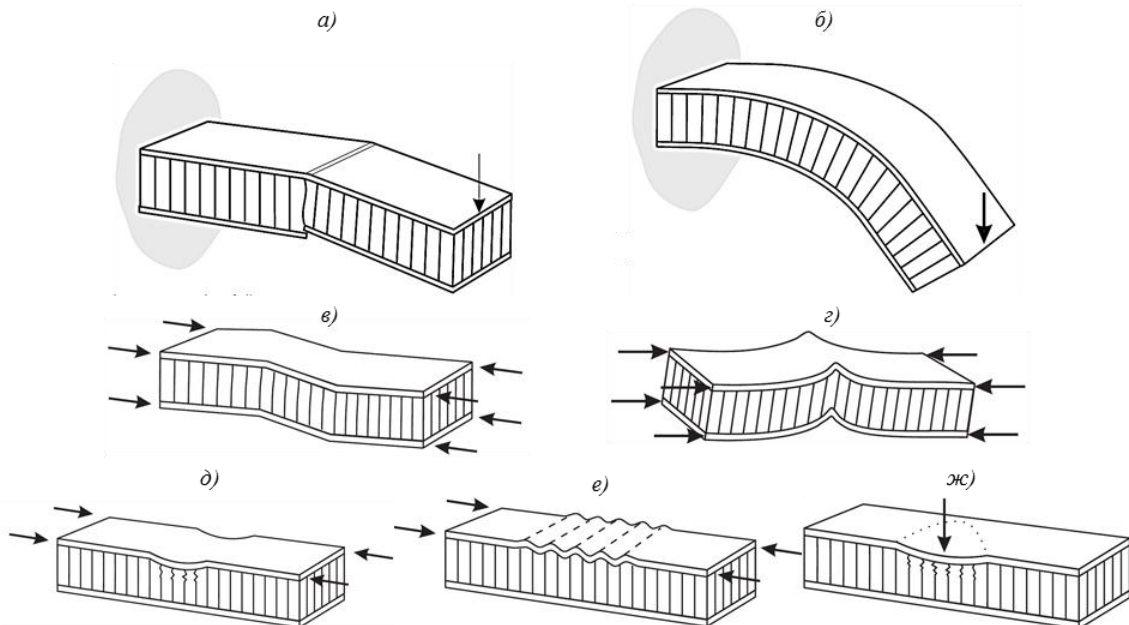


Рис. 6. Виды разрушения сэндвич-панели:

$a$  – разрушение панели;  $б$  – падение жесткости;  $в$  – потеря устойчивости;  $г$  – гофрирование;  $д$  – сморщивание (потеря устойчивости наружного листа);  $е$  – складкообразование;  $ж$  – локальное сморщивание

*Модель прочности сердцевины сэндвич-панели* предназначена для расчета прочности сердцевины при межслойном сдвиге и действии нормальных к плоскости ламината напряжений ( $\sigma_z$ ), которые учитываются в критерии только тогда, когда они определяют состояние при расчете напряженного состояния.

*Модель складкообразования* представлена в работах [49, 50] для листов сэндвич-панелей при одноосном нагружении. Складкообразование на внешних листах сэндвич-панелей – это локальная потеря устойчивости, моделировать которую возможно при замещении внешних листов пластинами на упругом основании, которое образовано сердцевинной.

В *модели гофрирования* максимальное усилие сжатия является функцией свойств внешнего слоя и сердцевины в направлении приложения нагрузки. Экспериментально определяются весовые коэффициенты, а если внешние слои существенно меньше сердцевины, то их весовой коэффициент может быть принят за 0, а для сердцевины – за 1.

Гофрирование – это локальное разрушение [51, 52], которое можно принять за случай продольного изгиба, когда длина волны образца при изгибе мала вследствие низкого модуля сдвига сердцевины. Гофрирование возникает внезапно и часто приводит к разрушению сердцевины или связей между внешними слоями и сердцевинной.

Существует два подхода для оценки прочности слоистых полимерных композиционных материалов (ПКМ), применяемые на различных этапах разработки конструкции. В соответствии с первым подходом, с помощью того или иного критерия оценивается прочность каждого слоя и по полученным результатам делается заключение о прочности всего пакета. Согласно второму подходу, определяется прочность всего пакета слоев, который рассматривается как условно однородный анизотропный материал, наделенный некоторыми прочностными характеристиками. На этапе проектирования изделий из ПКМ, когда неизвестна структура материала, а значит, пределы прочности, модули упругости и другие характеристики (как теоретические, так и экспериментальные), используется критерий прочности для оценки каждого слоя, а на этапе поверочного расчета на прочность – критерий прочности для оценки пакета слоев в целом.

Оценка прочности отдельно взятого монослоя базируется на экспериментальных результатах по его испытанию при растяжении, сжатии и сдвиге. По критерию разрушения определяется критическая комбинация действующих в монослое напряжений (деформаций), приводящая к его разрушению. В общем случае анализ прочности композиционного пакета сводится к определению напряженно-деформированного состояния его слоев и вычислению коэффициентов запаса прочности слоев по тем или иным критериям. Минимальный из этих критериев определяет запас прочности композитного пакета в целом.

Рассмотрим критерии, базирующиеся на *предельных напряжениях монослоя*.

*Критерий прочности Цая–Хилла (Хилла–Мизеса)* [53–56] является квадратичным критерием, построенным на четвертой (энергетической) теории прочности и основанным на напряжении, с помощью которого можно идентифицировать разрушение, но невозможно различить формы разрушения. Этот критерий применим в большинстве случаев к композитным оболочкам, и лучше всего применять его к слоистым материалам, когда силы растяжения и сжатия равны. Основным недостатком критерия является невозможность определения причины разрушения монослоя: произошло разрушение матрицы или волокна. Это может быть препятствием при дальнейшей оценке прочности композиционного пакета, так как разрушением матрицы отдельного монослоя прочность пакета может не исчерпываться. В программах, использующих этот критерий и различающих первичное и вторичное разрушение композиционного материала, обычно априори полагают, что произошло разрушение матрицы, и соответствующим

образом корректируют жесткость монослоя. Кроме того, по этому критерию не различаются комбинации напряжений  $\sigma_1$ – $\sigma_2$ , так как двухосные растяжение или сжатие являются в данном случае эквивалентными.

*Критерий прочности Хоффмана* является расширенным вариантом критерия Цая–Хилла и учитывает свойства при растяжении или сжатии в одном критерии [57]. Данный критерий базируется на сумме линейных и квадратичных инвариантов напряжений.

*Критерий прочности Цая–Ву* [58–60] является модификацией критерия Хоффмана и феноменологической материальной теорией разрушения, которая широко используется для анизотропных композиционных материалов, имеющих различные прочности при растяжении и сжатии. Недостатком этого критерия является то, что он, так же как и критерий Цая–Хилла, не прогнозирует различные формы разрушений, включая разрушение волокон и матрицы. Критерий лучше применять тогда, когда силы растяжения и сжатия не равны.

Критерии максимальных напряжений Цая–Хилла, Хоффмана и Цая–Ву не несут информацию о том, что произошло в монослое – разрушилась матрица или волокно. Разрушение матрицы отдельно взятого монослоя не всегда ведет к исчерпанию его несущей способности, и пакет материала может продолжать нести возрастающую нагрузку. Поэтому все более широкое распространение получают критерии, в которых отдельно анализируются запасы прочности как матрицы, так и волокна, – например, критерии Хашина или Пака.

*Критерий прочности Хашина* [58, 61, 62] идентифицирует четыре различных способа разрушения композиционного материала: волокна – при растяжении или сжатии; матрицы – при растяжении или сжатии. В уравнениях по критерию Хашина учитываются межслойные касательные напряжения, поэтому требуется определить дополнительные компоненты тензора касательных напряжений, что усложняет расчет и требует проведения дополнительных испытаний образцов.

*Критерий прочности Пака* [59, 63–65] идентифицирует разрушение волокна и межволоконное разрушение в однонаправленном композиционном материале (в основе лежит теория прочности Мора). Критерий описывает две различные формы разрушения волокна. Первая является разрушением при растяжении, вторая – разрушением при сжатии с перекручиванием. Уравнения критерия Пака учитывают трещинообразование в матрице. Данный критерий выглядит так же, как и критерий максимальных напряжений. Различие между ними состоит в том, что упругие характеристики матрицы могут иметь нелинейный характер и деформационные критерии дают возможность в какой-то степени учесть этот фактор.

*Критерий прочности LaRC* используют для армированных волокнами композиционных материалов [41, 42]. Он основан на физических моделях для каждой формы разрушения. При рассмотрении сжатия волокон возможен вариант разрушения от волнообразного перегиба волокон при локальной потере устойчивости в одном направлении.

Существует также достаточно много деформационных критериев прочности, в основе которых лежат предельные деформации разрушения монослоя. Одним из наиболее распространенных среди них является *критерий максимальных деформаций*, который идентифицирует разрушение композиционного материала, вызванное тремя возможными формами разрушения: продольным, поперечным, сдвиговым. При расчете критерий не учитывает взаимосвязей между различными составляющими деформаций и применяется для первоначального проектирования изделий из ПКМ. Этот критерий выглядит так же, как и критерий максимальных напряжений. Различие между ними состоит в том, что упругие характеристики матрицы могут иметь нелинейный характер и деформационные критерии дают возможность в какой-то степени учесть этот фактор.

В табл. 1 показано для оценки прочности каких типов слоев предназначен тот или иной критерий прочности.

Таблица 1

Рекомендации по применению критериев прочности [52]

| Критерий прочности      | Тип слоя   |                |        |                       |                    |         |
|-------------------------|------------|----------------|--------|-----------------------|--------------------|---------|
|                         | изотропный | однаправленный | тканый | гомогенная сердцевина | сотовая сердцевина | сэндвич |
| Максимальных деформаций | –          | +              | +      | –                     | –                  | –       |
| Максимальных напряжений | –          | +              | +      | –                     | –                  | –       |
| Мизеса                  | +          | –              | –      | –                     | –                  | –       |
| Цая–Ву                  | –          | +              | +      | –                     | –                  | –       |
| Цая–Хилла               | –          | +              | –      | –                     | –                  | –       |
| Хоффмана                | –          | +              | +      | –                     | –                  | –       |
| Хашина                  | –          | +              | –      | –                     | –                  | –       |
| Пака                    | –          | +              | +      | –                     | –                  | –       |
| Кунце                   | –          | +              | –      | –                     | –                  | –       |
| LaRC                    | –          | +              | –      | –                     | –                  | –       |
| Складкообразования      | –          | –              | –      | –                     | –                  | +       |
| Сердцевины              | –          | –              | –      | +                     | +                  | +       |
| Гофрирования            | –          | –              | –      | +                     | +                  | +       |

Степень использования на практике тех или иных критериев прочности, по некоторым данным зарубежных источников, демонстрирует диаграмма, представленная на рис. 7.

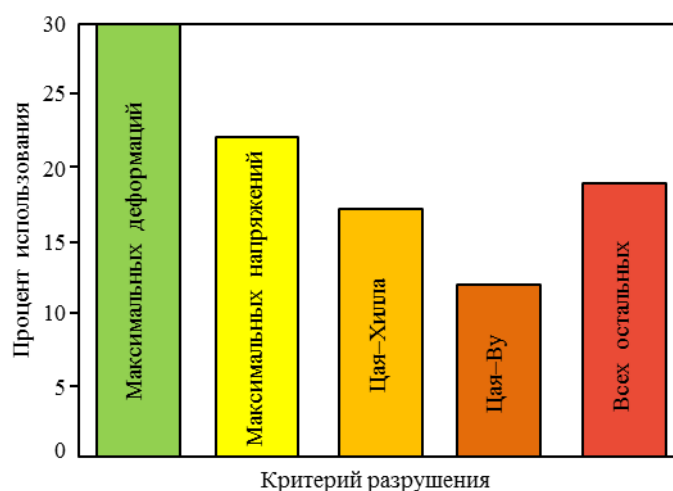


Рис. 7. Использование различных критериев разрушения композиционного материала [52, 57]

В отечественной практике наибольшее применение нашли критерии, базирующиеся на напряжениях, рассмотренных по критериям Цая–Хилла и Цая–Ву. Видимо, это связано с тем обстоятельством, что в паспортных характеристиках монослоя чаще указываются разрушающие напряжения, а не деформации.

Модель прочности Писаренко–Лебедева используют для оценки прочности хрупких и пластичных материалов и конструкций [66–68]. Эквивалентные напряжения по этой модели определяют, используя коэффициент пластичности материала  $\chi$  (изменяется в пределах от 0 до 1), который определяет сдвиговую деформацию, в результате которой происходит разрушение или образование трещин:

$$\sigma_{\text{экв}} = \chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma_{\text{пред}}, \quad (4)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\sigma_{\text{пред}}$  – предельное напряжение для материала, найденное экспериментально.

Коэффициент пластичности материала можно определить по формуле

$$\chi = \frac{\sigma_p}{\sigma_c}, \quad (5)$$

где  $\sigma_p$  – предел прочности при растяжении;  $\sigma_c$  – предел прочности при сжатии.

При отсутствии данных по пределу прочности материала при сжатии авторами работы [66] предлагается заменить коэффициент пластичности материала  $\chi$  относительным остаточным сужением  $\psi$ .

Обычно в расчетах на прочность используются экспериментальные физико-механические характеристики однонаправленных композиционных материалов (монослоев), при этом отсутствуют данные об их свойствах в наборе слоев. Поэтому необходима проверка степени соответствия между свойствами слоистого композиционного материала, полученными экспериментально и путем расчета на базе любого критерия прочности, при принятии постулата о пределе прочности, соответствующем напряжениям начала разрушения какого-либо слоя [69, 70]. Это позволило бы, с одной стороны, иметь достоверный аппарат (хотя бы для конкретного класса композиционного материала) прогнозирования свойств слоистого композиционного материала, с другой – обосновать целесообразность применения того или иного критерия прочности.

### **Обзор моделей прочности материалов, используемых в программе ANSYS Mechanical APDL**

При проведении прочностных расчетов композиционных материалов одним из самых распространенных применяемых методов является метод конечных элементов (МКЭ) [71–75]. В настоящее время существует большое количество критериев разрушения анизотропных тел, используемых в программных продуктах конечно-элементного анализа. Все они основываются на связи значений тензора напряжений и деформаций и рассматривают разрушение отдельного слоя с началом разрушения всей конструкции.

Для подготовки усредненных моделей композиционных оболочек и вычисления прочности по слоям, как правило, используют отдельные модули в составе расчетного комплекса.

Следует отметить, что кроме программных пакетов МКЭ, в которых осуществляется построение модели композитной конструкции и анализ ее прочности по имеющимся критериям, также существуют отдельные программные продукты, которые не позволяют создавать геометрическую форму модели, поэтому проводят специализированный анализ конечно-элементных моделей, созданных в сторонних конечно-элементных программных комплексах. В таких специализированных программах число предлагаемых для анализа критериев может достигать нескольких десятков, позволяя пользователю выбрать наиболее подходящий критерий. Кроме того, основные программные комплексы МКЭ дают пользователям возможность запрограммировать произвольный критерий на языке высокого уровня [76].

Проведем обзор моделей прочности материалов, используемых в конечно-элементных программных комплексах на примере известной программы ANSYS Mechanical APDL, позволяющей проводить прочностные расчеты как металлических, так и композиционных материалов [77–80].

В ANSYS реализована обширная классификация материалов и механических законов их поведения (табл. 2) [81–83].

Рассмотрим более подробно основные пункты табл. 2.

1. Для линейно-упругого материала (изотропного – сталь, пластмасса и др.; анизотропного – древесина, стеклопластик и др.; ортотропного – листы металла после прокатки, кости и др.) характерна упругая деформация по закону Гука.

2. Сверхупругие материалы (эластомеры) обладают свойствами резины, для них характерны большие сверхупругие деформации. Диаграмма деформирования таких материалов может иметь несколько точек перегиба (рис. 8).

Таблица 2

**Классификация материалов и основных механических законов их поведения, реализуемых программой ANSYS**

| Условный номер | Классификация материала                                | Основные законы поведения материала         | Свойства материалов   |
|----------------|--|---|---|
| 1              | Линейно-упругий  | 1.1 Гука (изотропный)                       | Material Models Available<br>Favorites<br>Linear Static<br>Density<br>Linear Isotropic<br>Thermal Expansion (secant-iso)<br>Structural<br>Linear<br>Nonlinear<br>Elastic<br>Hyperelastic<br>Curve Fitting<br>Mooney-Rivlin<br>Ogden<br>Neo-Hookean<br>Polynomial Form<br>Arruda-Boyce<br>Gent<br>Yeoh<br>Blatz-Ko (Foam)<br>Ogden (Foam)<br>Mooney-Rivlin (TB,MOON)<br>Multilinear Elastic<br>Inelastic<br>Curve Fitting<br>Rate Independent<br>Rate Dependent<br>Non-metal Plasticity<br>Cast-Iron<br>Shape Memory Alloy<br>Viscoelastic<br>Curve Fitting<br>Maxwell<br>Prony<br>Density<br>Thermal Expansion<br>Secant Coefficient<br>Instantaneous Coefficient<br>Thermal Strain<br>Damping<br>Mass Multiplier<br>Stiffness Multiplier<br>Frequency Independent<br>Friction Coefficient<br>Specialized Materials<br>Gasket |
|                |  | 1.2 Гука (анизотропный)                     |   |
|                |  | 1.3 Гука (ортотропный)                      |   |
| 2              | Сверхупругий   | 2.1 Муни–Ривлина                            |   |
|                |  | 2.2 Арруда–Бойса                            |   |
|                |  | 2.3 Блатца–Ко                               |   |
| 3              | Мультилинейно-упругий                                  | 3 Мультилинейный упругий                    |   |
| 4              | Вязкоупругий   | 4 Вязкоупругий                              |   |
| 5              | Изотропно-упрочняющийся                                | 5.1 Билинейный изотропный                   |   |
|                |  | 5.2 Мультилинейный изотропный               |   |
|                |  | 5.3 Нелинейный изотропный                   |   |
| 6              | Анизотропно-упрочняющийся                              | 6 Анизотропный                              |   |
| 7              | Кинематически-упрочняющийся                            | 7.1 Билинейный кинематический               |   |
|                |  | 7.2 Мультилинейный кинематический           |   |
|                |  | 7.3 Кабоше                                  |   |
| 8              | С комбинацией кинематического и изотропного упрочнения | 8.1 Кабоше и билинейный изотропный          |   |
|                |  | 8.2 Кабоше и мультилинейный изотропный      |   |
|                |  | 8.3 Кабоше и нелинейный изотропный          |   |
| 9              | Хрупкий  | 9.1 Друкера–Прагера                         |   |
|                |  | 9.2 Вильяма–Варнке                          |   |
|                |  | 9.3 Базанта                                 |   |
| 10             | Вязкопластичный  | 10.1 Ползучести                             |   |
|                |  | 10.2 Ананда                                 |   |
| 11             | С комбинацией ползучести и изотропного упрочнения      | 11.1 Ползучести и билинейный изотропный     |   |
|                |  | 11.2 Ползучести и мультилинейный изотропный |   |
|                |  | 11.3 Ползучести и нелинейный изотропный     |   |

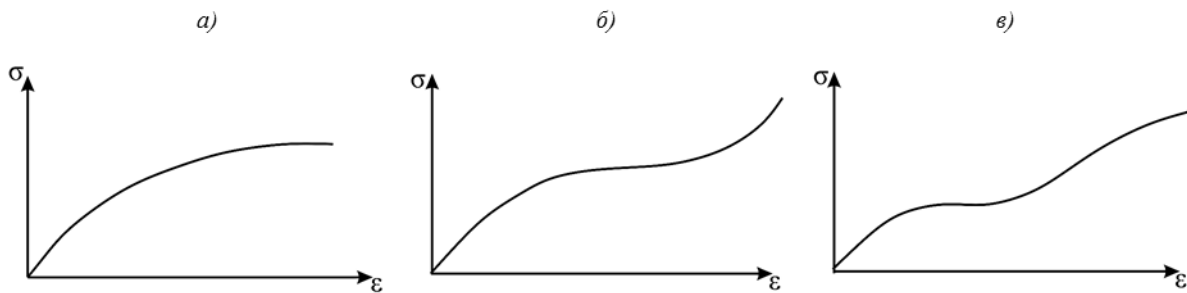


Рис. 8. Диаграммы растяжения сверхупругих материалов без перегиба (а) и с одной (б) или двумя точками перегиба (в)

Механическое поведение сверхупругих материалов описывается несколькими моделями: Муни–Ривлина, Арруда–Бойса и Блатца–Ко. *Модель Муни–Ривлина* часто используется при моделировании сверхупругих материалов (учитывает девять параметров). *Модель Арруда–Бойса* применяется для моделирования больших деформаций резиновых материалов (построена с учетом физики полимеров). *Модель Блатца–Ко* используют для моделирования сжатия материалов типа пенополиуретана.

3. Мультилинейная упругость является кусочно-линейной моделью, которая описывает нелинейное поведение материала. Мультилинейное нагружение описывается *моделью Бесселинга*, которая представляет деформационную кривую в виде нескольких линейных участков, при этом учитывается эффект Баушингера (рис. 9).

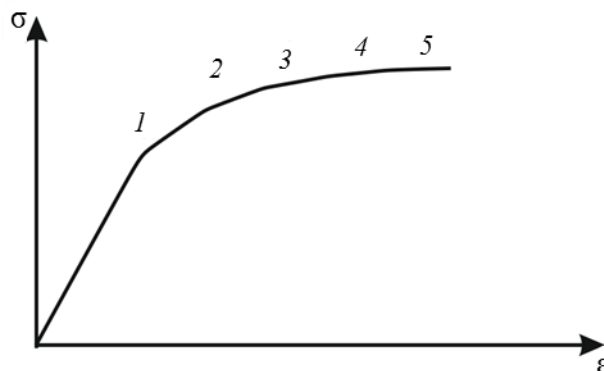


Рис. 9. Мультилинейная диаграмма деформирования (точки 1–5 – линейные участки)

4. Вязкоупругость – свойство материалов (обычного стекла, полимеров, пластмасс, твердых топлив и др.) быть как упругими, так и вязкими. Деформация вязкоупругого материала состоит из двух обратимых частей: мгновенно исчезающей и зависящей от времени.

5. Билинейное нагружение отражает обычное нагружение металлических конструкций и предполагает, что деформационная кривая состоит из двух линейных участков (диаграмма Прандля). Кривая деформации при билинейном нагружении представлена на рис. 10, а. Эффект Баушингера, описывающий циклическое билинейное нагружение металла, представлен на рис. 10, б.

Эта модель упругопластического поведения материала использует критерий текучести Мизеса, ассоциативный закон течения и кинематическое упрочнение. На рис. 11 показана поверхность текучести Мизеса при билинейном изотропном упрочнении. На рис. 12 представлено мультилинейное изотропное упрочнение.

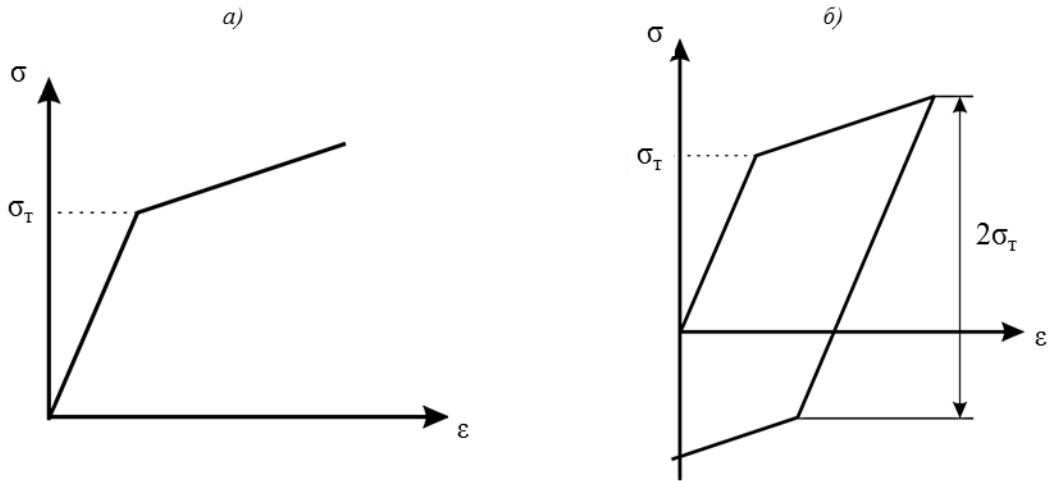


Рис. 10. Билинейное нагружение:  
*a* – статическое; *б* – циклическое, учитывающее эффект Баушингера

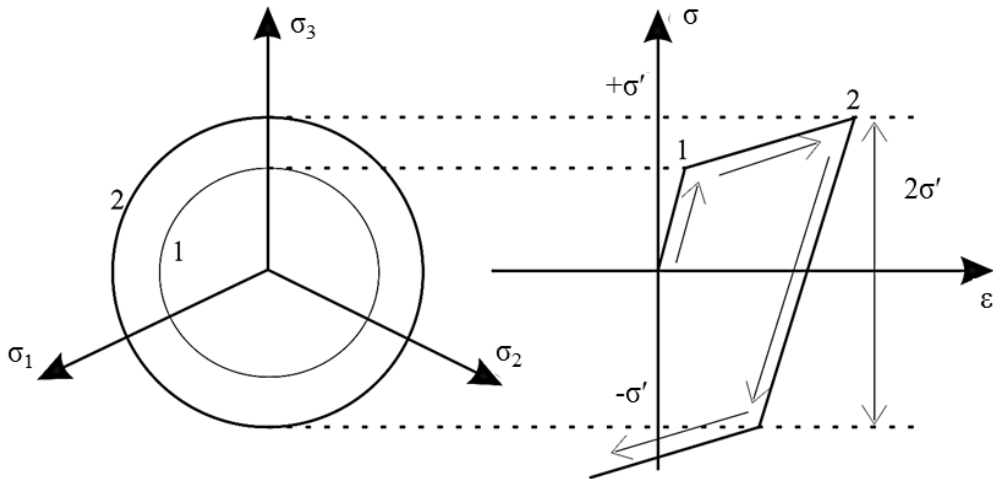


Рис. 11. Поверхность текучести Мизеса при билинейном изотропном упрочнении

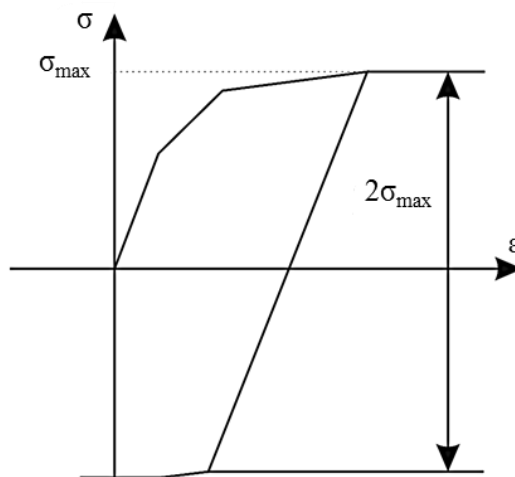


Рис. 12. Мультилинейное изотропное упрочнение

6. На рис. 13 представлена диаграмма анизотропного упрочнения и поверхность текучести для анизотропного упрочнения.

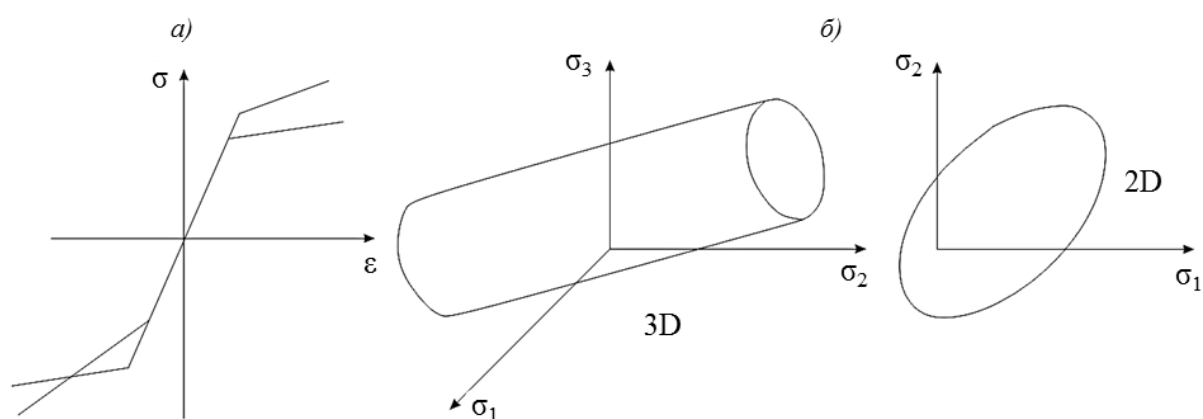


Рис. 13. Диаграмма анизотропного упрочнения (а) и поверхность текучести для анизотропного упрочнения (б)

7. Модель билинейного кинематического упрочнения может использоваться для расчетов малоциклового усталости (рис. 14). Для этой модели характерно смещение поверхности текучести без изменения своих размеров.

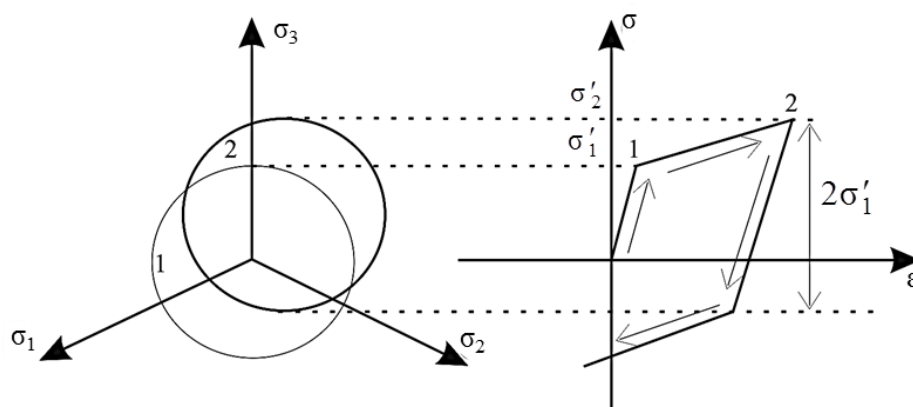


Рис. 14. Поверхность текучести Мизеса при билинейном кинематическом упрочнении

Мультилинейное кинематическое упрочнение описывается кусочно-линейной диаграммой деформирования.

Для описания нелинейного кинематического упрочнения используют *модель Кабоше*, которая описывает монотонное упрочнение и эффект Баушингера.

Вязкопластичность сочетает упругое и неупругое, чувствительное к скорости деформации, поведение материала.

8. Сочетание кинематического и изотропного упрочнения – это модель, которая используется для моделирования циклического упрочнения и разупрочнения.

9. Модели Друкера–Прагера, Вильяма–Варнке и Базанта описаны в предыдущем разделе.

10. Явление ползучести заключается в росте деформаций при постоянном напряжении или в понижении (релаксации) напряжений при постоянной деформации. Существуют три стадии ползучести, первые две из которых возможно моделировать в программе ANSYS (рис. 15).

*Модель Ананда* описывает поведение металлов при повышенных температурах и использует условие текучести Мизеса с ассоциированным законом течения.

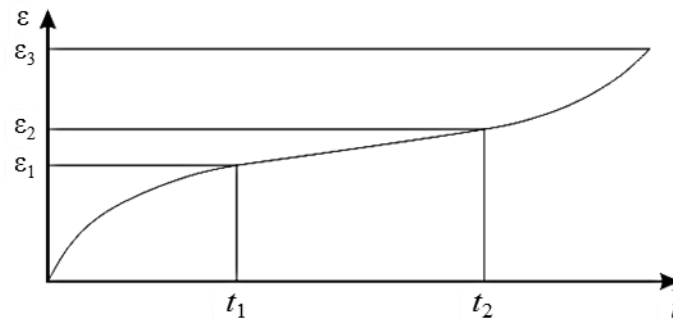


Рис. 15. Фазы ползучести – первая ( $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ ), вторая ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$ ) и третья ( $\varepsilon_2 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_3$ )

Расслоение композиционного материала в результате действия усилий поперечного сдвига и растяжения может быть смоделировано в компьютерной программе ANSYS Composite PrePPos исходя из величины межслойных касательных напряжений. Для предсказания прочности в программе ANSYS Composite PrePPos используют критерии максимальных напряжений и деформаций, Цая–Бу, Цая–Хилла, Хашина, критерий LaRC, критерии Кунце и Пака.

### Заключения

Рассмотренные модели можно разделить на критерии:

- по предельным значениям – наиболее простые, не требующие сложных вычислений или проведения дополнительных экспериментальных исследований;
- по объединенным значениям – объединяющие значения компонент тензора напряжений в общем, легко анализируемое полиномиальное уравнение;
- по виду разрушения – наиболее сложные, кусочно-заданные функции, рассматривающие различные виды разрушения отдельно [84].

В расчетной практике наиболее распространенными являются критерии максимальных напряжений Цая–Хилла, Цая–Бу и Хоффмана. Эти критерии используются в большинстве конечно-элементных программных комплексов как стандартные средства оценки прочности композиционных материалов и конструкций. В плане их практического применения следует отметить одну немаловажную деталь. Как правило, в большинстве случаев они дают оценку прочности матрицы. В то же время, например, в практике самолетостроения при нагрузках выше эксплуатационных допускаются местные разрушения элементов конструкции, не приводящие к исчерпанию ее несущей способности вплоть до расчетных нагрузок. Поэтому учет деградации свойств композита, вызванный частичным разрушением матрицы, является актуальной задачей. Именно этим обстоятельством объясняется в настоящее время повышенный интерес к критериям с отдельной оценкой прочности матрицы и волокна, таким как критерий Пака и методики учета деградации характеристик композита при нагружении [57].

На основании обзора отечественной и зарубежной научно-технической литературы можно сделать вывод о существовании множества различных математических моделей и подходов для определения прочности композиционных материалов, расчета конструкций и изделий из них. Однако для исследования композиционных материалов неоднородной структуры классические модели расчета прочности не применимы. Наибольшее распространение в области исследований композиционных материалов имеют феноменологически-статистические подходы, основанные на аппроксимации экспериментальных данных при простейших испытаниях материала. Для того чтобы определить наиболее эффективные критерии, необходимо проанализировать применимость каждого критерия для используемого материала и найти значения предельной нагрузки при исследовании прочности конструкции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Каблов Е.Н. Инновационные разработки ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ по реализации «Стратегических направлений развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года» // *Авиационные материалы и технологии*. 2015. №1 (34). С. 3–33. DOI: 10.18577/2071-9140-2015-0-1-3-33.
2. Каблов Е.Н. Композиты: сегодня и завтра // *Металлы Евразии*. 2015. №1. С. 36–39.
3. Бузник В.М., Каблов Е.Н., Кошурина А.А. Материалы для сложных технических устройств арктического применения // *Научно-технические проблемы освоения Арктики*. М.: Наука, 2015. С. 275–285.
4. Ерасов В.С., Орешко Е.И. Коэффициент Пуассона и пуассонова сила // *Авиационные материалы и технологии*. 2018. №4 (53). С. 79–86. DOI: 10.18577/2071-9140-2018-0-4-79-86.
5. Ерасов В.С., Автаев В.В., Орешко Е.И., Яковлев Н.О. Преимущества «жесткого» нагружения при испытаниях на статическое и повторно-статическое растяжение // *Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн.* 2018. №9 (69). Ст. 10. URL: <http://viam-works.ru> (дата обращения: 25.08.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-9-92-104.
6. Ерасов В.С., Орешко Е.И. Деформация и разрушение как процессы изменения объема, площади поверхности и линейных размеров в нагружаемых телах // *Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн.* 2016. №8 (44). Ст. 11. URL: <http://viam-works.ru> (дата обращения: 25.08.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-8-11-11.
7. Ерасов В.С., Орешко Е.И., Луценко А.Н. Площадь свободной поверхности как критерий хрупкого разрушения // *Авиационные материалы и технологии*. 2017. №2 (47). С. 69–79. DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-2-69-79.
8. Ерасов В.С., Орешко Е.И. Силовой, деформационный и энергетический критерии разрушения // *Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн.* 2017. №10 (58). Ст. 11. URL: <http://viam-works.ru> (дата обращения: 25.08.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2017-0-10-11-11.
9. Ерасов В.С., Орешко Е.И., Луценко А.Н. Образование новых поверхностей в твердом теле на стадиях упругой и пластической деформаций, начала и развития разрушения // *Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн.* 2018. №2 (62). Ст. 12. URL: <http://viam-works.ru> (дата обращения: 25.08.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-2-12-12.
10. Ерасов В.С., Орешко Е.И. Причины зависимости механических характеристик трещиностойкости материала от размеров образца // *Авиационные материалы и технологии*. 2018. №3 (52). С. 56–64. DOI: 10.18577/2071-9140-2018-0-3-56-64.
11. Степин П.А. Сопротивление материалов: учеб. М.: Высшая школа, 1988. 367 с.
12. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 2003. 561 с.
13. Тарануха Н.А. Теория упругости: учеб. пособие. Хабаровск: Хабаровский политех. ин-т, 1992. 87 с.
14. Ottozen N.S. A Failure Criterion for Concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE*. 1977. Vol. 103. NEM4. P. 527–535.
15. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Ин Юре, 2003. 540 с.
16. Westergaard H.M. Plastic state of stress around a deep well // *Journal of the Boston Society of Civil Engineers Section*, 1940. Vol. 27. No. 1. P. 1–5.
17. Филоненко-Бородич М.М. Об условиях прочности материалов, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // *Инженерный сборник*. 1954. Вып. 19. С. 36–48.
18. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 416 с.
19. Balan T.A., Spacone E., Kwon M. 3D hypoplastic model for cyclic analysis of concrete structures // *Engineering Structures*. Elsevier, 2001. No. 23. P. 333–342.
20. Клованич С.Ф., Безушко Д.И. Метод конечных элементов в расчетах пространственных железобетонных конструкций. Одесса: Изд-во ОНМУ, 2009. 89 с.

21. Казаринов Ю.И. Прочность элементов конструкций с вырезами и повреждениями: монография. Тюмень: ТИУ, 2017. С. 94–95.
22. Попов А.А., Хатунцев А.А., Шашков И.Г., Кочетков А.В. Пространственный деформационный нелинейный расчет железобетонных изгибаемых конструкций методом конечных элементов // Научное ведомство: Интернет-журнал, 2013. №5. URL: <http://cyberleninka.ru/article/n/prostranstvennyu-deformatsionnyu-nelineynyy-raschet-zhelezobetonnyh-izgibaemyh-konstruktsiy-metodom-konechnyh-elementov> (дата обращения: 25.08.2019).
23. Warnke K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete // Seminar of concrete structures subjected to triaxial stresses. Dergamo, 1974. Vol. 19. P. 3–11.
24. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis for limit design // Quarterly of Applied Mathematics. 1952. No. 2. P. 157–165.
25. Bazant Z.P., Cedolin L. Fracture mechanics of reinforced concrete // Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE. 1980. Vol. 106. P. 1287–1306.
26. Charles B., Norris C.B. Strength of orthotropic materials subjected to combined stresses. Forest Products Laboratory Report, 1962. P. 41.
27. Tsai S.W., Wu E.M. A General Theory of Strength for Anisotropic Materials // Journal of Composite Materials. 1971. No. 5 (1). P. 58–80. DOI: 10.1177/002199837100500106.
28. Тарнопольский Ю.М., Киндис Т.Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Химия, 1975. 262 с.
29. Hankinson R.L. Investigation of crushing strength of spruce at varying angles of grain // Air Force Information Circular. 1921. No. 259. P. 130.
30. Тарнопольский Ю.М., Скудра А.М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига: Зинатне, 1966. 266 с.
31. Клованич С.Ф., Карпенко С.Н. О расчете пространственных железобетонных конструкций методом конечных элементов // Бетон и железобетон в третьем тысячелетии: сб. тр. Международной научно-практической конференции. Ростов-н/Д, 2000. С. 179–184.
32. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. М.: НИИЖБ, 1986. С. 7–25.
33. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
34. Дзюба В.А., Глушакова Ю.С. Применение составной функции диаграммы сжатого бетона для деформационной оценки конструкций // Ученые записки КнАГТУ. Сер.: Науки о природе и технике. 2014. Т. II. №1 (18). С. 109–114.
35. Тарануха Н.А., Васильев А.С. Численное моделирование поведения сложных композитных конструкций в области их предельных состояний // Наука. Инновации. Техника и технологии: проблемы, достижения и перспективы: материалы Междунар. научн.-практ. конф. (Комсомольск-на-Амуре, 12–16 мая 2015 г.). Комсомольск-на-Амуре: КнАГТУ, 2015. С. 96–99.
36. Грезин В.М. Исследование прочности и деформативности стеклопластика АГ-4С при кратковременных и длительных нагрузках // Труды Воронежского инженерно-строительного института. 1967. №13. Вып. 2. С. 3–8.
37. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Ястребов А.С. Прогнозирование прочностных и деформационных характеристик материалов при испытаниях на растяжение и ползучесть // Материаловедение. 2019. №1. С. 3–9.
38. Тарануха Н.А., Васильев А.С. Численное исследование предельной несущей способности конструкций из композитных материалов // Морские интеллектуальные технологии. Сер.: Кораблестроение, информатика, вычислительная техника и управление. 2015. Т. 2. №3 (29). С. 27–32.
39. Тарануха Н.А., Васильев А.С. Алгоритмы и модели при численном проектировании композитных сред на заданные характеристики для морских сооружений // Ученые записки КнАГТУ. Сер.: Науки о природе и технике. 2015. Т. I. №1 (21). С. 81–86.
40. Bazant Z.P., Oh B.H. Crack band theory for fracture of concrete // Materials and structures. 1983. Vol. 16. P. 155–176.
41. Lin C.S., Scordelis A.C. Nonlinear analysis of RC shells of general form // Journal of structural division. 1975. Vol. 101. No. ST3. P. 523–538.

42. Vasilyev A.S., Taranukha N.A. Algorithms and numerical model for the research of limit state of structures of composite materials // The 29th Asia-Pacific Technical Exchange and Advisory Meeting on Marine Structures (TEAM-2015). Vladivostok, 2015. P. 29–34.
43. Laws N. A note on interaction energies associated with cracks in anisotropic solids // Philosophical Magazine. 1977. No. 36 (2). P. 367–372. DOI: 10.1080/14786437708244940.
44. Pinho S., Davila C., Camanho P. et al. Failure models and criteria for FRP under in-plane or three-dimensional stress states including shear non-linearity. NASA, 2005. P. 61.
45. Davila C., Navin J. Failure Criteria for FRP Laminates in Plane-Stress / NASA Langley Research Center. 2003. P. 28.
46. Тышкевич В.Н. Выбор критериев прочности для труб из армированных пластиков // Известия ВолгГТУ. 2011. №5 (78). С. 76–79.
47. Карпов В.В., Семенов А.А. Критерии прочности для тонкостенных ортотропных оболочек. Ч. 1: Анализ основных критериев прочности изотропных и ортотропных материалов // Вестник гражданских инженеров. 2014. №6 (47). С. 43–51.
48. Алиев М.М., Байбурова М.М. Критерии кратковременной прочности анизотропных материалов и применение их для решения задач предельного равновесия // Вестник СамГУ. Естественная серия. 2007. №6 (56). С. 22–29.
49. Structural Materials Handbook. ESA Publications Division, 1994. Vol. 1. 564 p.
50. Sullins R.T. Manual for Structural Stability Analysis of Sandwich Plates and Shells. CR-145. NASA. 1969. P. 9–15.
51. Судзуки Н., Аракава Т., Ямаура Т., Какихара С., Мураока Р. Применение труб с высокой деформационной способностью при изготовлении методом холодного изгиба криволинейных отводов с большим углом // Газовая промышленность. 2007. Спецвыпуск №4 (762). С. 66–71.
52. Муйземнек А.Ю., Карташова Е.Д. Механика деформирования и разрушения полимерных слоистых композиционных материалов: учеб. пособие. Пенза: Изд-во ПГУ, 2017 С. 39–42.
53. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
54. Маковенко С.Я. О взаимности компонент тензоров прочности некоторых теорий прочности анизотропных материалов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2005. №1. С. 65–70.
55. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
56. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. Композиционные материалы: справ. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.
57. Гришин В.И., Дзюба А.С., Дударьков Ю.И. Прочность и устойчивость элементов и соединений авиационных конструкций из композитов. М.: Изд-во физ.-матем. лит., 2013. 272 с.
58. Abrate S. Criteria for yielding or failure of cellular materials // Journal of Sandwich Structures and Materials. 2008. Vol. 10. P. 5–51.
59. Daniel L.M., Ishai O. Engineering Mechanics of Composite materials. Oxford: Oxford University Press, 1994. 432 p.
60. Башаров Е.А., Ерков А.П. Метод расчета многослойного пакета из полимерного композиционного материала с учетом выбора критерия прочности // Полет. 2018. №6. С. 39–53.
61. Puck A. Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung // Kunststoffe. 1969. Vol. 59. No. 11. P. 780–787.
62. Knops M. Analysis of Failure in Fiber Polymer Laminates. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008. 205 p. DOI:10.1007/978-3-540-75765-8.
63. Gdoutos E.E., Daniel I.M., Wang K.A. Multiaxial characterization and modeling of a PVC cellular foam // Journal of Thermoplastic Composite Materials. 2001. Vol. 14. P. 365–373.
64. Puck A., Kopp J., Knops M. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models // Computer Science Technology. 2002. Vol. 62. P. 1633–1662.
65. Puck A., Kopp J., Knops M. Guidelines for the determination of the parameters in Puck's action plane strength criterion // Computer Science Technology. 2002. Vol. 62. P. 371–378.

66. Белов А.В., Неумоина Н.Г. Об использовании обобщенного критерия прочности Писаренко–Лебедева в расчетах на прочность при неизотермических процессах нагружения // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014. №9–2. С. 8–10.
67. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 415 с.
68. Лебедев А.А. Развитие теорий прочности в механике материалов // Проблемы прочности. 2010. №5. С. 127–146.
69. Карпов Я.С., Ставиченко В.Г. Исследование и анализ способов удовлетворения критериям прочности слоистого композиционного материала // Авиационно-космическая техника и технология. 2004. Вып. 1. С. 3–10.
70. Карпов Я.С., Ставиченко В.Г. Сравнительный анализ подходов к оценке прочности слоистых композиционных материалов // Проблемы прочности. 2008. №4. С. 36–42.
71. Боровков А.И. Возможности системы конечно-элементного моделирования ANSYS/LS-DYNA // Сб. материалов I Междунар. конф. пользователей программного обеспечения ANSYS E. M.: EMT–ANSYS-центр, 2003. С. 128–136.
72. Коллеров М.Ю., Гусев Д.Е., Орешко Е.И. Экспериментально-теоретическое обоснование выбора метода и имплантатов для устранения воронкообразной деформации грудной клетки // Научные труды (Вестник МАТИ). 2012. №19 (91). С. 331–336.
73. Гусев Д.Е., Коллеров М.Ю., Рудаков С.С., Королев П.А., Орешко Е.И. Оценка биомеханической совместимости имплантируемых опорных пластин из сплавов на основе титана и никелида титана методом компьютерного моделирования // Титан. 2011. №3 (33). С. 39–44.
74. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Лашов О.А., Подживотов Н.Ю., Качан Д.В. Численное исследование несущей способности слоистого материала // Все материалы. Энциклопедический справочник. 2019. №3. С. 16–21.
75. Димитриенко Ю.И., Луценко А.Н., Губарева Е.А., Орешко Е.И., Базылева О.А., Сборщиков С.В. Расчет механических характеристик жаропрочных интерметаллидных сплавов на основе никеля методом многомасштабного моделирования // Авиационные материалы и технологии. 2016. №3 (42). С. 33–48. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-3-33-48.
76. Гриневиц Д.В., Яковлев Н.О., Славин А.В. Критерии разрушения композиционных материалов (обзор) // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2019. №7 (79). Ст. 11. URL: <http://viam-works.ru> (дата обращения: 25.08.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2019-0-7-92-111.
77. Кравчук А.С., Смалюк А.Ф., Кравчук А.И. Электронная библиотека механики и физики. Лекции по ANSYS с примерами решения задач: метод. пособие в 5 ч. Минск, 2013. Ч. 4. 118 с.
78. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н. Критические напряжения потери устойчивости в гибридных слоистых пластинах // Материаловедение. 2016. №11. С. 17–21.
79. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Луценко А.Н., Терентьев В.Ф., Слизов А.К. Построение диаграмм деформирования в трехмерном пространстве  $\sigma$ – $\varepsilon$ – $t$  // Авиационные материалы и технологии. 2017. №1 (46). С. 61–68. DOI: 10.18577/2071-9140-2017-0-1-61-68.
80. Antipov V.V., Oreshko E.I., Erasov V.S., Serebrennikova N.Y. Hybrid laminates for application in north conditions // Mechanics of Composite Materials. 2016. Vol. 24. P. 1–12.
81. Browell R., Lin G. The Power of Nonlinear Materials Capability, Part 1 and 2 on modeling materials with nonlinear characteristics // ANSYS Solutions. 2000. Vol. 2. No. 1. P. 8–10.
82. Орешко Е.И., Ерасов В.С., Лашов О.А., Подживотов Н.Ю., Качан Д.В. Расчет напряжений в слоистом материале // Труды ВИАМ: электрон. науч.-технич. журн. 2018. №10 (70). Ст. 11. URL: <http://viam-works.ru> (дата обращения: 25.08.2019). DOI: 10.18577/2307-6046-2018-0-10-93-106.
83. Коллеров М.Ю., Усиков В.Д., Куфтов В.С., Гусев Д.Е., Орешко Е.И. Медико-техническое обоснование использования титановых сплавов в имплантируемых конструкциях для стабилизации позвоночника // Титан. 2013. №1 (40). С. 39–45.
84. Васильев А.С. Математическое моделирование и численное исследование композитных материалов в области предельной прочности: дис. ... канд. техн. наук. Комсомольск-на-Амуре, 2016. 165 с.