
Научная статья

УДК 539.4

DOI: 10.18577/2307-6046-2026-0-2-167-180

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ И ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ КОНСТРУКЦИЙ С ПРОГНОЗИРОВАНИЕМ НАПРАВЛЕНИЯ РОСТА ТРЕЩИНЫ

А.И. Сутубалов¹

¹Федеральное государственное унитарное предприятие «Всероссийский научно-исследовательский институт авиационных материалов» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Москва, Россия; admin@viam.ru

***Аннотация.** Представлен анализ прочности и трещиностойкости конструкций, в частности L-образной панели, с использованием метода конечных элементов. Рассмотрена методика оценки предельных напряженных состояний конечных элементов, определяющих направление роста трещины на основе критериев линейной упругой механики разрушения. Проведено численное моделирование L-образной панели, находящейся под воздействием вертикальной нагрузки. Моделирование включало дискретизацию конструкции с использованием метода конечных элементов, формирование матриц жесткости и исследование предельных состояний. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными для бетонных конструкций.*

***Ключевые слова:** трещиностойкость, метод конечных элементов, матрица жесткости, механика разрушения, L-образная панель*

***Для цитирования:** Сутубалов А.И. Анализ прочности и трещиностойкости конструкций с прогнозированием направления роста трещины // Труды ВИАМ. 2026. № 2 (156). С. 167–180. URL: <http://www.viam-works.ru>. DOI: 10.18577/2307-6046-2026-0-2-167-180.*

Scientific article

ANALYSIS OF STRUCTURAL STRENGTH AND CRACK RESISTANCE WITH PREDICTION OF CRACK GROWTH DIRECTION

A.I. Sutubalov¹

¹Federal State Unitary Enterprise «All-Russian Scientific-Research Institute of Aviation Materials» of National Research Center «Kurchatov Institute», Moscow, Russia; admin@viam.ru

***Abstract.** The article presents an analysis of the strength and crack resistance of structures, in particular an L-shaped panel, using the finite element method. A methodology for estimating the limiting stress states of finite elements that determine the direction of crack growth based on criteria of linear elastic fracture mechanics is considered. Numerical simulation of an L-shaped panel under the influence of vertical load is carried out. The modeling included the discretization of the structure using the finite element method, the formation of stiffness matrices, and the study of limit states. The simulation results are in good agreement with experimental data for concrete structures.*

***Keywords:** crack resistance, finite element method, stiffness matrix, fracture mechanics, L-shaped panel*

***For citation:** Sutubalov A.I. Analysis of structural strength and crack resistance with prediction of crack growth direction. *Trudy VIAM*, 2026, no. 2 (156), pp. 167–180. Available at: <http://www.viam-works.ru>. DOI: 10.18577/2307-6046-2026-0-2-167-180.*

Введение

Задача расчета прочностных характеристик (жесткость, долговечность, устойчивость и др.) конструкции или ее отдельных элементов требует учета множества определяющих факторов, таких как условия нагружения и свойства материала, которые в той или иной степени формируют реакцию на внешнее воздействие. Предполагается, что все необходимые данные о нагрузках и характеристиках материала получены заранее (экспериментальным или другим способом), и теперь задача сводится к определению напряженно-деформированного состояния конструкции.

Однако только данных о напряженно-деформированном состоянии недостаточно для однозначного вывода о том, достигнуто ли предельное состояние, которое может привести к разрушению. В качестве такого критического состояния принимается момент, когда начинается неконтролируемый рост трещины, уже присутствующей в конструктивном элементе. Проблема определения начала распространения трещины тесно связана с понятием разрушения.

В настоящее время известно множество критериев разрушения, однако лишь некоторые из них получили широкое практическое применение [1–6]. Среди наиболее признанных можно выделить следующие: коэффициент интенсивности напряжений (K), инвариантный энергетический интеграл (J -интеграл) и параметр раскрытия трещины в ее вершине (δ).

В данной работе проведен расчет L-образной панели, изготовленной из квазихрупкого материала и закрепленной в шарнирном четырехзвеннике, при действии вертикальной растягивающей нагрузки F . Использовали метод конечных элементов (КЭ) [7–13] при определении предельных напряженных состояний в дискретизированной модели конструкции.

Методика оценки трещиностойкости конструкции

Методика, описанная в работе [14], предназначена для оценки прочности и трещиностойкости конструкций на стадии проектирования, что позволяет значительно снизить затраты, связанные с проведением натурных испытаний [15–23].

На начальном этапе оценки прочности конструкции используется теория формоизменения (хорошо согласуется с квазихрупкими материалами [14]), которая позволяет определить, выдержит ли конструкция приложенные нагрузки. Критерий прочности записывается в следующем виде:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}}, \quad (1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения, МПа.

Трещина зарождается, когда удовлетворяется следующее условие [14]:

$$\sigma > \sigma_b, \quad (2)$$

где σ_b – предел прочности при растяжении, МПа.

В области вершины трещины возникают концентрации напряжений, достигающие критических значений, значительно превышающих предел прочности материала. Для оценки поведения материала в таких условиях и прогнозирования роста трещины применяются методы линейной упругой механики разрушения. В работе [14] приведены следующие параметры процесса:

– критическое значение интенсивности выделения упругой энергии с учетом трех типов трещин (G_c);

– комбинированный параметр (критерий Гриффитса и энергия формоизменения) с учетом трех типов трещин (U_c).

Методы линейной упругой механики разрушения применимы при соблюдении следующих ограничений [14]:

- размер зоны пластичности в окрестности вершины трещины составляет $\leq 20\%$ от ее длины, что соответствует условию маломасштабной текучести;
- относительное удлинение при разрушении должно составлять $\leq 20\%$;
- разрушающее напряжение в нетто-сечении образца должно быть $\leq 80\%$ от предела текучести материала.

Далее рассчитываются критические значения условных коэффициентов интенсивности напряжений для всех трех *mod* разрушения [14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{Ic} \cong 0,65\sigma_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины первого типа}), \\ K_{IIc} \cong 0,65\tau_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины второго типа}), \\ K_{IIIc} \cong 0,65\tau_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины третьего типа}), \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{Ic} \cong 0,65\sigma_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины первого типа}), \\ K_{IIc} \cong 0,65\tau_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины второго типа}), \\ K_{IIIc} \cong 0,65\tau_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины третьего типа}), \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{Ic} \cong 0,65\sigma_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины первого типа}), \\ K_{IIc} \cong 0,65\tau_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины второго типа}), \\ K_{IIIc} \cong 0,65\tau_t \sqrt{\pi\sqrt{A}} \quad (\text{для трещины третьего типа}), \end{array} \right. \quad (5)$$

где σ_t – предел текучести при растяжении, МПа; τ_t – предел текучести при сдвиге, МПа; A – площадь плоскости α , заданная единичными векторами \bar{x} и \bar{y} (рис. 1), мм².

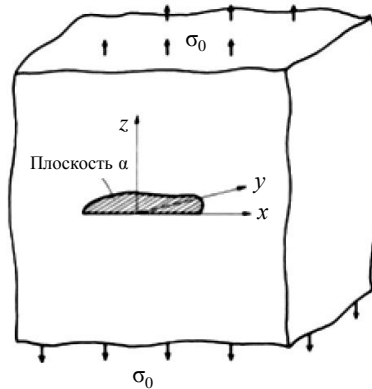


Рис. 1. Плоскость α в произвольной трещине: σ_0 – номинальное напряжение [14]

На следующем этапе рассчитывается критическое значение интенсивности выделения упругой энергии G_c , которое учитывает влияние всех трех типов трещин. Для его определения используется следующая формула [14]:

$$G_c = \frac{1-\mu^2}{E} (K_{Ic}^2 + K_{IIc}^2) + \frac{1-\mu}{E} K_{IIIc}^2, \quad (6)$$

где μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости, МПа.

Энергия деформации в вершине трещины определяется посредством комбинированного применения теорий Гриффитса и энергии формоизменения [14]:

$$U_c = \frac{\pi \left(\frac{1+\mu}{6E} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2) V_{КЭ} \right)}{A_{КЭ}}, \quad (7)$$

где $V_{КЭ}$ – объем КЭ, мм³; $A_{КЭ}$ – площадь геометрической фигуры, полученной пересечением ребер КЭ с плоскостью α , мм².

Множитель π вводится для корректировки неоднородности механических свойств материала и неравномерности распределения напряжений в окрестности трещины [14].

На рис. 2 представлена геометрическая фигура, образованная пересечением плоскости α с ребрами КЭ (в качестве примера взят четырехузловой тетраэдрический элемент). Площадь этой фигуры определяется как площадь треугольника ABC и обозначается как $A_{КЭ} = S_{ABC}$ [14].

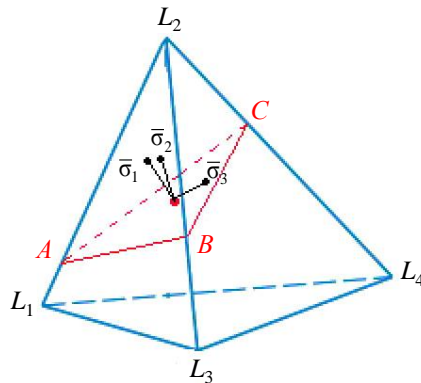


Рис. 2. Геометрическая фигура в форме треугольника ABC , полученная пересечением плоскости α с ребрами конечного элемента: $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ – векторы главных напряжений [14]

В данном случае ориентация плоскости α определяется двумя векторами главных напряжений ($\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\sigma}_3$), действующими в узловой точке вершины трещины. Сама трещина, проходящая через четырехузловой тетраэдрический элемент, целиком лежит в этой плоскости α . При выполнении условия

$$\frac{U_c}{G_c} > 1, \tag{8}$$

КЭ ослабляется на величину 10^{-4} [14]. Это свидетельствует о начале распространения трещины, после чего соответствующие КЭ исключаются из расчета за счет уменьшения их локальной матрицы жесткости в 10^{-4} раза.

Процесс анализа трещиностойкости продолжается до тех пор, пока выполняются следующие условия [14]:

– суммарные перемещения рассматриваемой итерации не превышают десятикратные суммарные перемещения предыдущей итерации

$$U_i \leq 10U_{i-1}; \tag{9}$$

– зарождение или распространение трещины соответствует формулам (2) и (8).

Ослабленные КЭ конструкции соответствуют предполагаемому пути распространения трещины, определяемому по предельным напряженным состояниям этих элементов.

В представленной работе для анализа зарождения и роста трещины используется комплексный подход, сочетающий силовой (формула (2)) и энергетический (формула (8)) критерии. Силовой и энергетический критерии дополняют друг друга, обеспечивая двухуровневую проверку на разрушение.

Проведение расчета трещиностойкости L-образной панели Исходные данные L-образной панели

Для моделирования роста трещины выбрана L-образная панель толщиной 1 мм из квазихрупкого материала, которую подвергали воздействию вертикального усилия F (рис. 3). Параметры материала L-образной панели:

Модуль упругости E , МПа	200000
Коэффициент Пуассона μ	0,3
Предел прочности при растяжении σ_b , МПа	370
Предел текучести при растяжении σ_t , МПа	300
Предел прочности при сдвиге τ , МПа	205
Предел текучести при сдвиге τ_t , МПа	150
Усилие F , кН	100

Из численного эксперимента необходимо определить предельные состояния КЭ конструкции при постоянной вертикальной нагрузке. Расчет прекращали при достижении полного разрушения панели, т. е. ее разделения на две части.

Действие сосредоточенной силы F заменяли распределенной нагрузкой вдоль граней пластины. Следует отметить, что величина нагрузки выбрана заведомо большей для заданных геометрических размеров и материала панели. Такой подход позволяет гарантированно инициировать процесс разрушения без необходимости подбора минимальной нагрузки, приводящей к потере целостности конструкции.

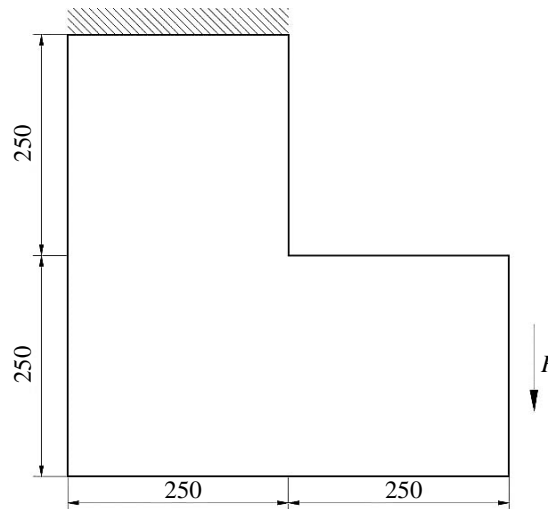


Рис. 3. L-образная панель

Разбиение на конечные элементы

Необходимо разбить L-образную панель на КЭ, т. е. дискретизировать рассматриваемую область Ω на некоторое количество подобластей Ω_e . В дальнейшем индекс e будет указывать на принадлежность той или иной величины конкретному КЭ. При этом КЭ не должны пересекаться между собой, т. е. не допускается их взаимное наложение, а также они должны полностью (без зазоров и разрывов) заполнять исходную область Ω .

Панель разбили на четырехузловые плоские изопараметрические КЭ размером 10×10 мм в локальной системе координат с осями ξ и η (рис. 4). Оси ξ и η локальной системы координат совпадали с осями x и y глобальной системы координат. Значения координат КЭ на осях ξ и η находились в диапазоне $[-1; +1]$ (в безразмерных величинах). Это означает, что каждая координата изменялась в пределах от -1 на одной стороне элемента до $+1$ на противоположной стороне, принимая нулевое значение на медианах [10].

Выбор данного типа КЭ (четырёхузловой изопараметрический элемент с билинейными функциями формы) обусловлен его эффективностью и устойчивостью при моделировании сингулярностей полей напряжений в окрестности вершины трещины.

Линейные функции формы обеспечивают сходимость решения и адекватную аппроксимацию больших градиентов напряжений при умеренных вычислительных затратах. В качестве альтернативы можно рассмотреть восьмиузловые квадратичные элементы. Однако восьмиузловые элементы могут приводить к избыточной сложности сетки в зонах с высокими градиентами и повышению вычислительных затрат.

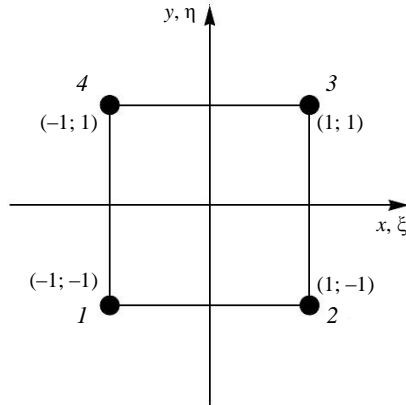


Рис. 4. Четырехузловой плоскодеформируемый элемент

В узлах КЭ были связаны между собой и взаимодействовали друг с другом как единое целое. Таким образом, КЭ взаимодействовали через «связи», установленные исключительно в узлах принятой конечно-элементной модели. В этих узловых точках прикладывали узловые силы и возникали узловые перемещения. Узловые перемещения представляют собой степени свободы узла – параметры, определяющие его положение в пространстве, а значит, положение всей L-образной панели в целом. Узлы располагались в вершинах КЭ (на рис. 4 обозначены черными точками). Вектор узловых перемещений элемента имеет вид

$$\{u_e\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

После разбиения сетка состояла из 1976 узлов и 1875 КЭ. Каждый элемент состоял из четырех узлов со своей глобальной нумерацией (рис. 5).

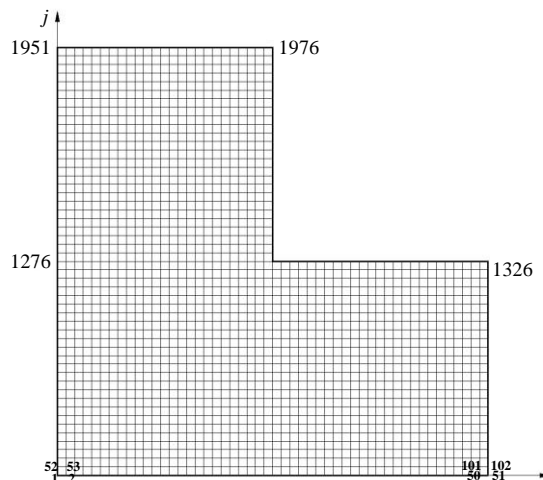


Рис. 5. Глобальная нумерация узлов

При построении конечно-элементной модели важным этапом является выбор базисных кусочно-определенных функций N_1-N_4 для подобластей Ω_e . Эти функции, известные как функции формы, предназначены для однозначного определения искомой функции в любой точке внутри элемента на основе дискретных значений этой функции, заданных в узловых точках. С их помощью описываются перемещения, деформации и напряжения в узлах КЭ через соответствующие дискретные параметры. Функции формы выражаются следующими соотношениями, записанными через локальные координаты [10]:

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, & N_2(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, & N_4(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}. \end{aligned} \quad (11)$$

Метод построения локальной и глобальной матриц жесткости

Суть изопараметрической техники построения КЭ заключается в том, что для описания геометрических размеров КЭ используются те же функции формы, что и для описания перемещений узлов КЭ. Интерполирующие функции координат узлов через функции формы имеют вид:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 x_i N_i(\xi, \eta), \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 y_i N_i(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (12)$$

где $N_i(\xi, \eta)$ – функция формы i -го узла элемента; x_i, y_i – координаты i -го узла элемента.

Интерполирующие функции перемещений через функции формы, с помощью которых описывается потенциальное распределение перемещений по области КЭ вдоль осей координат:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 u_i N_i(\xi, \eta), \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 v_i N_i(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (13)$$

где u_i, v_i – перемещение i -го узла элемента.

Деформации в глобальной и локальной системах координат связаны с обратной матрицей Якоби (матрица частных производных):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где $[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$ – матрица Якоби; $\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$ – деформации в глобальной системе координат;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix} - \text{деформации в локальной системе координат.}$$

Это позволило вычислить в любой точке элемента с заданными координатами (ξ, η) полный набор частных производных поля перемещений по каждому из направленных декартовой системы координат.

Использованный изопараметрический четырехузловой КЭ должен быть применим для решения задач плоского напряженного состояния. В этом случае можно воспользоваться соотношениями между напряжениями и деформациями по закону Гука:

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)) = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = 2G(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)) = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x), \\ \tau = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (15)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль сдвига.

Применено соотношение Коши для деформаций:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{cases} \quad (16)$$

Согласно закону Гука (15) выражена матрица упругих постоянных:

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Из соотношений Коши (16) получена матрица дифференциальных операторов:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} & \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Таким образом, можно записать следующее векторное уравнение:

$$\{L_e\} = [N]\{u_e\}, \quad (19)$$

где $\{L_e\}$ – вектор перемещений в текущей точке элемента; $[N] = \begin{bmatrix} N_1(\xi, \eta)N_3(\xi, \mu) \\ N_2(\xi, \eta)N_3(\xi, \mu) \\ N_1(\xi, \eta)N_4(\xi, \mu) \\ N_2(\xi, \eta)N_4(\xi, \mu) \end{bmatrix}$ – матрица базисных функций формы.

Деформация может быть выражена через узловые перемещения элемента:

$$\{\varepsilon_e\} = [C]\{L_e\} = [C][N]\{u_e\} = [B]\{u_e\}, \quad (20)$$

где $[B] = [C][N]$ – матрица связи узловых деформаций и перемещений.

Тогда напряжения можно записать в следующем виде:

$$\{\sigma_e\} = [D]\{\varepsilon_e\} = [D][B]\{u_e\}. \quad (21)$$

Для получения локальной матрицы жесткости, т. е. матрицы жесткости отдельного КЭ, используются различные численные методы, среди которых наиболее распространены вариационные подходы.

Рассмотрен вариационный подход получения матрицы жесткости КЭ, основанного на минимизации полной потенциальной энергии системы Π_e [10, 14], при условии единичной толщины КЭ:

$$\Pi_e = U_e + V_e, \quad (22)$$

где U_e – потенциальная энергия упругой деформации КЭ; V_e – работа внешних сил КЭ.

Потенциальная энергия упругой деформации КЭ определяется по формуле (интегрирование проводится по площади КЭ A)

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dA = \frac{1}{2} \int_A \{u_e\}^T [B]^T [D][B]\{u_e\} dA. \quad (23)$$

Выражение для работы внешних сил КЭ будет выглядеть следующим образом (интегрирование проводится по контуру поверхности Γ в случае поверхностных сил и по площади КЭ A в случае объемных сил):

$$V_e = - \int_{\Gamma} \{u_e\}^T [N]^T \{p\} d\Gamma - \int_A \{u_e\}^T [N]^T \{f_e\} dA, \quad (24)$$

где $\{p\}$ – вектор поверхностных сил; $\{f_e\}$ – вектор объемных сил.

Следует отметить, что в выражениях (23) и (24) варьируемыми параметрами являются узловые перемещения $\{u_e\}$.

Вариация полной потенциальной энергии системы в рамках вариационного принципа по $\{u_e\}$ с последующим приравнением полученного выражения к нулю $\left(\frac{\partial \Pi_e}{\partial u_e} \rightarrow 0\right)$ позволяет определить вариацию потенциала Лагранжа:

$$\frac{\partial \Pi_e}{\partial u_e} = \{u_e\}^T \left[\int_A ([B]^T [D][B])\{u_e\} dA - \int_{\Gamma} [N]^T \{p\} d\Gamma - \int_A [N]^T \{f_e\} dA \right] = 0. \quad (25)$$

Следовательно, уравнение равновесия КЭ примет вид

$$[K_e]\{u_e\} = \{F_e\}, \quad (26)$$

где $[K_e] = \int_A ([B]^T [D] [B]) \{u_e\} dA$ – локальная матрица жесткости КЭ; (27)

$\{F_e\} = \int_{\Gamma} [N]^T \{p\} d\Gamma + \int_A [N]^T \{f_e\} dA$ – вектор внешних сил, действующих на КЭ. (28)

Формулы (27) и (28) приведены к нормированным координатам $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$:

$$[K_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det(J) d\xi d\eta, \quad (29)$$

$$\{F_e\} = \int_{\Gamma(\xi, \eta)} [N]^T \{p\} \det(J) d\Gamma_{(\xi, \eta)} - \int_A [N]^T \{f_e\} \det(J) d\xi d\eta. \quad (30)$$

Полученные матрицы жесткости для элементов и векторы ассамблируются в глобальную матрицу жесткости $[K_{\text{глоб}}]$ и вектор внешних нагрузок $\{F\}$. Таким образом, можно записать основное уравнение метода КЭ, решение которого позволит определить вектор перемещений узлов $\{U\}$:

$$[K_{\text{глоб}}]\{U\} = \{F\}. \quad (31)$$

Преобразование узловых значений в элементарные

После нахождения узловых значений перемещений, деформаций и напряжений по описанному алгоритму следует перейти к определению напряжений каждого КЭ.

Процесс преобразования прост. Полученные значения для всех узлов, на которые ссылается элемент, усредняются по формуле (32) для вычисления итогового значения элемента σ_x^j :

$$\sigma_x^j = \frac{\sigma_{xi}^j + \sigma_{xi}^j + \sigma_{xi}^j + \sigma_{xi}^j}{4}, \quad (32)$$

где j – номер элемента; i – номер узла в соответствии с глобальной нумерацией узлов на рис. 5.

Если данные не существуют на одном или нескольких узлах, тогда этот узел исключается, т. е. не учитывается в среднем значении. На рис. 6 проиллюстрировано усреднение напряжения по направлению x для первого элемента.

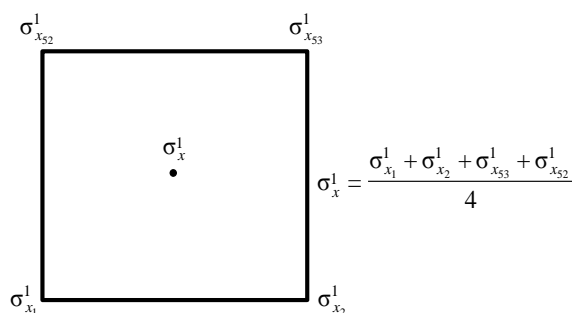


Рис. 6. Преобразование узловых напряжений в элементарные для первого элемента

Для нахождения главных напряжений используется следующая формула:

$$\sigma_{2,3}^j = \frac{\sigma_x^j + \sigma_y^j}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x^j - \sigma_y^j)^2 + 4(\tau_{xy}^j)^2}. \quad (33)$$

Для проведения анализа на трещиностойкость определяли значения K_{Ic} , K_{IIc} , G_c , U_c в соответствии с выражениями (3), (4), (6) и (7).

Результаты и обсуждение

Для зарождения или распространения трещины необходимо выполнение условия $\frac{U_c}{G_c} > 1$ или $\sigma_{2,3}^{эл} > \sigma_b$, где $\sigma_{2,3}^{эл}$ – значения главных напряжений элемента, вычисленные по формуле (33).

При выполнении одного из условий делается вывод, что в элементе образуется трещина. Это состояние КЭ считается предельным, локальная матрица жесткости элемента ослабляется на величину, равную 10^{-4} . Далее проводится повторный расчет с новой глобальной матрицей жесткости.

Предельные состояния КЭ образуются как от растягивающих напряжений (рис. 7, с 1-й по 13-ю итерации), так и от сжимающих напряжений (рис. 7, с 10-й по 13-ю итерации). В случае сжимающих напряжений локальные матрицы жесткости не ослабляли на величину 10^{-4} , так как трещина распространяется только от растягивающих напряжений в правой области. Предельные состояния от сжимающих напряжений показаны для демонстрации. Полное разрушение L-образной панели, соответствующее разделению конструкции на две части, зафиксировано на 13-й итерации расчета при соприкосновении левой и правой областей предельных состояний. На рис. 7 показано распределение предельных состояний на каждой итерации расчета.

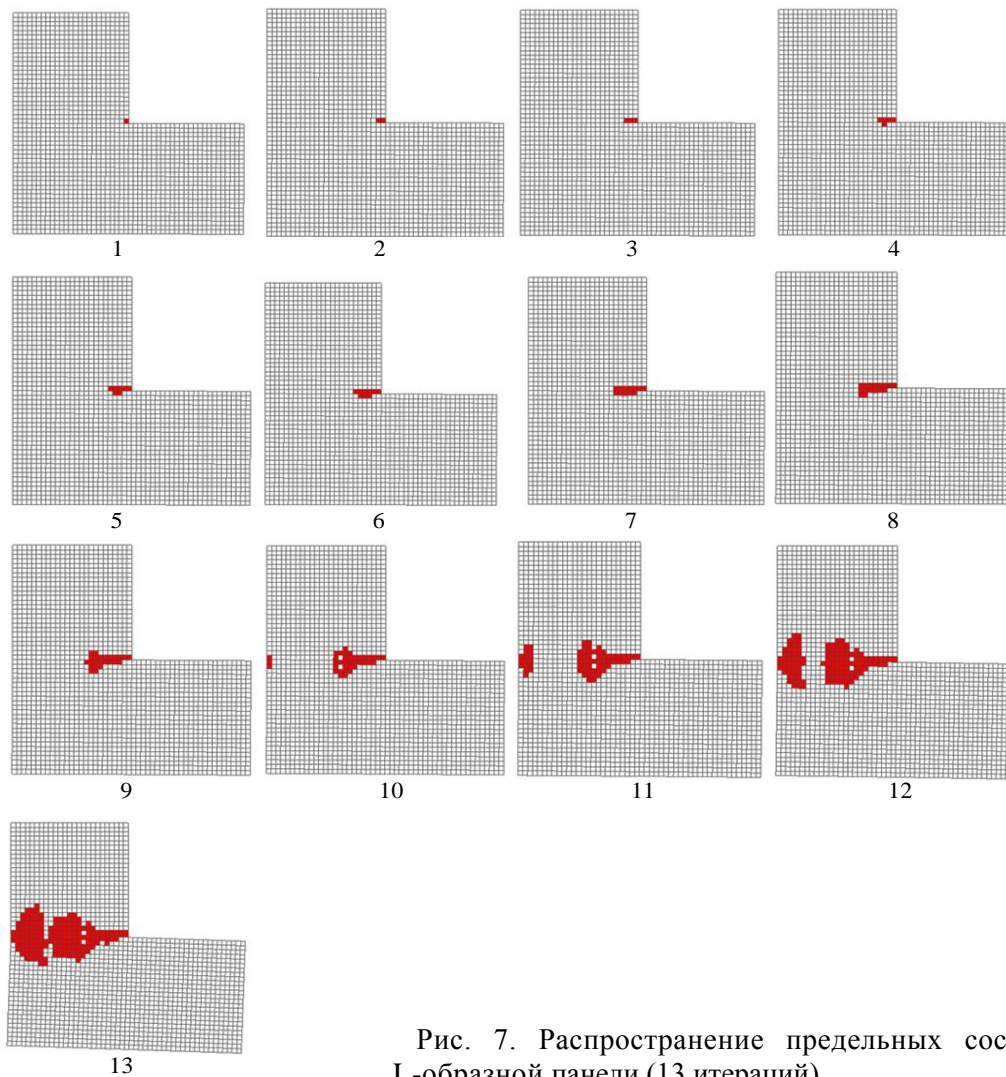


Рис. 7. Распространение предельных состояний L-образной панели (13 итераций)

Реализация описанного алгоритма, включая процедуру сборки глобальной матрицы жесткости, решение уравнения (31), расчет напряжений и критериев разрушения, выполнена на языке Python с использованием основных библиотек: `sympy`, `scipy`, `math` и `numpy`.

Распространение предельных состояний в описанном алгоритме хорошо согласуется с экспериментальными данными бетонной панели при визуальном наложении трещины на предельные состояния КЭ (рис. 8) [24].

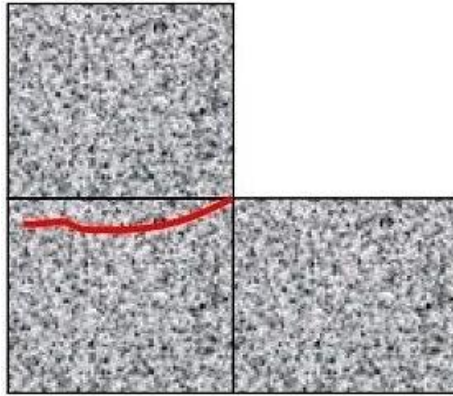


Рис. 8. Экспериментальный фронт трещины бетонной панели [24]

Заключения

На основе четырехузлового изопараметрического КЭ проведен анализ прочности и трещиностойкости квазихрупкой L-образной панели. Выполнено численное моделирование L-образной панели, включая дискретизацию, построение матриц жесткости и анализ напряженно-деформированного состояния. Результаты показали, что распространение предельных состояний КЭ подтверждается хорошим соответствием с экспериментальными данными фронта трещины бетонной панели, представленными в работе [24].

Работа выполнена в рамках реализации комплексного научного направления 2. «Фундаментально-ориентированные исследования, квалификация материалов, неразрушающий контроль» («Стратегические направления развития материалов и технологий их переработки на период до 2030 года») при поддержке ЦКП «Климатические испытания» НИЦ «Курчатовский институт» – ВИАМ.

Список источников

1. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел: курс лекций. СПб: Профессия, 2002. 320 с.
2. Anderson T.L. Fracture mechanics Fundamentals and Applications. 4 Ed. CRC Press – Taylor & Francis, 2017. 661 p.
3. Gdoutos E.E. Fracture Mechanics. 2 Ed. Springer Science, 2005. 369 p.
4. Öchsner A. Continuum Damage and Fracture Mechanics. Springer Science, 2016. 163 p.
5. Alan T. Zehnder Fracture Mechanics. Springer Science & Business Media, 2012. 223 p.
6. Федосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
7. Белкин А.Е., Гаврюшин С.С. Расчет пластин методом конечных элементов: учеб. пособие. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 232 с.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1979. 392 с.
9. Галлагер Р. МКЭ: Основы. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 215 с.
10. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 541 с.
11. Норри Д., Де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 304 с.
12. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.

13. Маслов Л.Б. Численные методы для решения задач теории упругости: метод. пособие. Иваново: Ивановский государственный энергетический университет, 1999. 28 с.
14. APM Structure3D. Система расчета и проектирования деталей и конструкций методом конечных элементов. Версия 18. URL: <https://apm.ru/downloads/188/APM-Structure3D-18.pdf> (дата обращения: 17.04.2025).
15. Шершак П.В., Яковлев Н.О., Сутубалов А.И. Стандарты по испытаниям полимерных композиционных материалов. Часть 1. Растяжение // *Авиационные материалы и технологии*. 2023. № 3 (72). С. 152–166. URL: <http://www.journal.viam.ru> (дата обращения: 17.04.2025). DOI: 10.18577/2713-0193-2023-0-3-152-166.
16. Шершак П.В., Сутубалов А.И., Яковлев Н.О., Шерстюк Ф.А. Стандарты по испытаниям полимерных композиционных материалов. Часть 2. Сжатие // *Авиационные материалы и технологии*. 2024. № 2 (75). С. 149–166. URL: <http://www.journal.viam.ru> (дата обращения: 17.04.2025). DOI: 10.18577/2713-0193-2024-0-2-149-166.
17. Шершак П.В., Яковлев Н.О., Сутубалов А.И. Стандарты по испытаниям полимерных композиционных материалов. Часть 3. Изгиб // *Авиационные материалы и технологии*. 2025. № 1 (78). С. 122–137. URL: <http://www.journal.viam.ru> (дата обращения: 17.04.2025). DOI: 10.18577/2713-0193-2025-0-1-122-137.
18. Яковлев Н.О., Луценко А.Н., Артемьева И.В. Методы определения межслоевой трещиностойкости слоистых материалов // *Все материалы*. Энциклопедический справочник. 2015. № 10. С. 57–64.
19. Крылов В.Д., Яковлев Н.О., Курганова Ю.А., Лашов О.А. Межслоевая трещиностойкость конструкционных полимерных композиционных материалов // *Авиационные материалы и технологии*. 2016. № 1 (40). С. 79–85. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-1-79-85.
20. Сулимина Я.В., Яковлев Н.О., Ерасов В.С. и др. Современные методики испытаний металлических материалов на смятие // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2019. Т. 85. № 7. С. 41–49. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-7-41-49.
21. Нужный Г.А., Дьяченко О.А., Монахов А.Д., Давыденко А.Н. Особенности определения относительного удлинения при испытании на растяжение металлических материалов // *Все материалы*. Энциклопедический справочник. 2021. № 3. С. 41–48. DOI: 10.31044/1994-6260-2021-0-3-41-48.
22. Монахов А.Д., Яковлев Н.О. Применение метода глубокого обучения при исследовании характеристик трещиностойкости // *Труды ВИАМ*. 2024. № 6 (136). С. 80–91. URL: <http://www.viam-works.ru> (дата обращения: 17.04.2025). DOI: 10.18577/2307-6046-2024-0-6-80-91.
23. Монахов А.Д., Яковлев Н.О., Автаев В.В., Ястребов А.С. Исследование трещиностойкости металлических материалов методом компьютерного зрения // *Неразрушающий контроль и техническая диагностика в авиационной промышленности: материалы XVI Всерос. конф. по испытаниям и исследованиям свойств материалов «ТестМат»*. М.: НИЦ «Курчатовский институт» – ВИАМ, 2024. С. 89–102.
24. Sun B. Adaptive multi-scale beam lattice method for competitive trans-scale crack growth simulation of heterogeneous concrete-like materials // *International Journal of Fracture*. 2021. No. 228 (1). P. 85–101. DOI: 10.1007/s10704-021-00519-w.

References

1. Pestrikov V.M., Morozov E.M. *Fracture Mechanics of Solids: A Lecture Course*. St. Petersburg: Professiya, 2002, 320 p.
2. Anderson T.L. *Fracture mechanics Fundamentals and Applications*. 4 Ed. CRC Press – Taylor & Francis, 2017, 661 p.
3. Gdoutos E.E. *Fracture Mechanics*. 2 Ed. Springer Science, 2005, 369 p.
4. Öchsner A. *Continuum Damage and Fracture Mechanics*. Springer Science, 2016, 163 p.
5. Alan T. *Zehnder Fracture Mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012, 223 p.
6. Fedosyev V.I. *Strength of Materials: A Textbook. for Universities*. 10th ed., revised and enlarged. Moscow: Bauman MSTU Publ. House, 1999, 592 p.
7. Belkin A.E., Gavryushin S.S. *Finite Element Method for Plate Calculation: A Tutorial*. Moscow: Bauman MSTU Publ. House, 2008, 232 p.
8. Segerlind L. *Application of the Finite Element Method*. Trans. from Engl. Moscow: Mir, 1979, 392 p.
9. Gallagher R. *FEM: Basics*. Trans. from Engl. Moscow: Mir, 1984, 215 p.

10. Zenkevich O.K. *Finite Element Method in Engineering*. Trans. from Engl. Moscow: Mir, 1975, 541 p.
11. Norrie D., De Vries J. *Introduction to the Finite Element Method*. Trans. from Engl. Moscow: Mir, 1981, 304 p.
12. Bate K., Wilson E. *Numerical Methods of Analysis and the Finite Element Method*. Trans. from Engl. Moscow: Stroyizdat, 1982, 448 p.
13. Maslov L.B. *Numerical Methods for Solving Elasticity Problems: A Methodological Guide*. Ivanovo: Ivanovo State Power Engineering University, 1999, 28 p.
14. *APM Structure3D. Finite Element Method for Calculating and Designing Parts and Structures. Version 18*. Available at: <https://apm.ru/downloads/188/APM-Structure3D-18.pdf> (accessed: April 17, 2025).
15. Shershak P.V., Yakovlev N.O., Sutubalov A.I. Standards for testing polymer composite materials. Part 1. Tensile properties. *Aviation materials and technologies*, 2023, no. 3 (72), pp. 152–166. Available at: <http://www.journal.viam.ru> (accessed: April 17, 2025). DOI: 10.18577/2713-0193-2023-0-3-152-166.
16. Shershak P.V., Sutubalov A.I., Yakovlev N.O., Sherstyuk F.A. Standards test methods for polymer matrix composite materials. Part 2. Compression properties. *Aviation materials and technologies*, 2024, no. 2 (75), pp. 149–166. Available at: <http://www.journal.viam.ru> (accessed: April 17, 2025). DOI: 10.18577/2713-0193-2024-0-2-149-166.
17. Shershak P.V., Yakovlev N.O., Sutubalov A.I. Standards test methods for polymer matrix composite materials. Part 3. Flexure properties. *Aviation materials and technologies*, 2025, no. 1 (78), pp. 122–137. Available at: <http://www.journal.viam.ru> (accessed: April 17, 2025). DOI: 10.18577/2713-0193-2025-0-1-122-137.
18. Yakovlev N.O., Lutsenko A.N., Artemyeva I.V. Methods for determining interlayer crack resistance of layered materials. *Vse materialy. Entsiklopedicheskiy spravochnik*, 2015, no. 10, pp. 57–64.
19. Krylov V.D., Yakovlev N.O., Kurganova Yu.A., Lashov O.A. Mezhsloyevy crack firmness of constructional polymeric composite materials. *Aviacionnye materialy i tehnologii*, 2016, no. 1 (40), pp. 79–85. DOI: 10.18577/2071-9140-2016-0-1-79-85.
20. Sulimina Ya.V., Yakovlev N.O., Yerasov V.S. et al. Modern methods for testing metallic materials for crushing. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2019, vol. 85, no. 7, pp. 41–49. DOI: 10.26896/1028-6861-2019-85-7-41-49.
21. Nuzhny G.A., Dyachenko O.A., Monakhov A.D., Davydenko A.N. Features of determining the relative elongation in tensile testing of metallic materials. *Vse materialy. Entsiklopedicheskiy spravochnik*, 2021, no. 3, pp. 41–48. DOI: 10.31044/1994-6260-2021-0-3-41-48.
22. Monakhov A.D., Yakovlev N.O. Application of the deep learning method in studying crack resistance characteristics. *Trudy VIAM*, 2024, no. 6 (136), pp. 80–91. Available at: <http://www.viam-works.ru> (accessed: April 17, 2025). DOI: 10.18577/2307-6046-2024-0-6-80-91.
23. Monakhov A.D., Yakovlev N.O., Avtaev V.V., Yastrebov A.S. Study of crack resistance of metallic materials by computer vision. *Non-destructive testing and technical diagnostics in the aviation industry: Proc. of the XVI All-Rus Conf. on testing and research of properties of materials «TestMat»*. Moscow: NRC «Kurchatov Institute» – VIAM, 2024, pp. 89–102.
24. Sun B. Adaptive multi-scale beam lattice method for competitive trans-scale crack growth simulation of heterogeneous concrete-like materials. *International Journal of Fracture*, 2021, no. 228 (1), pp. 85–101. DOI: 10.1007/s10704-021-00519-w.

Информация об авторах

Сутубалов Александр Игоревич, техник, НИЦ «Курчатовский институт» – ВИАМ, admin@viam.ru

Information about the authors

Alexander I. Sutubalov, Technician, NRC «Kurchatov Institute» – VIAM, admin@viam.ru

Статья поступила в редакцию 03.07.2025; получена после доработки 18.07.2025; одобрена и принята к публикации после рецензирования 15.09.2025.
The article was submitted 03.07.2025; received in revised form 18.07.2025; approved and accepted for publication after reviewing 15.09.2025.